SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PSI

MATHEMATIQUES 1

I Les suites α et β

I.1 Etude de la suite α

I.1.1 $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_0 - 1 = 0$, $\alpha_2 = 2\alpha_1 + 1 = 1$, $\alpha_3 = 3\alpha_2 - 1 = 2$ et $\alpha_4 = 4\alpha_3 + 1 = 9$.

$$\boxed{\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1\ \alpha_3 = 2 \text{ et } \alpha_4 = 9.}$$

I.1.2 α_0 et α_1 sont des entiers naturels. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 2$, α_n est un entier naturel non nul.

- Le résultat est vrai pour $n = 2$.
- Soit $n \geq 2$. Supposons que $\alpha_n \geq 1$. Déjà $\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1} \in \mathbb{Z}$. De plus,

$$\alpha_{n+1} \geq (2+1) \times 1 - 1 = 2 \geq 1.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \in \mathbb{N}.}$$

I.2 Etude de la suite β

I.2.1 $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1! \times (1-1) = 0$, $\beta_2 = 2!(1 - 1 + \dfrac{1}{2} = 1$, $\beta_3 = 3!(1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}) = 2$ et $\beta_4 = 4!(1 - 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{24}) = 9$.

$$\boxed{\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1\ \beta_3 = 2 \text{ et } \beta_4 = 9.}$$

I.2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\beta_n = (-1)^n + (-1)^{n-1}n + (-1)^{n-2}n(n-1) + \ldots + (-1)^2 n(n-1) \times \ldots \times 3 + (-1)^1 n(n-1) \times \ldots \times 2 + (-1)^0 n(n-1) \times \ldots \times 1 \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n \in \mathbb{Z}.}$$

I.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\beta_{n+1} - (n+1)\beta_n = (n+1)! \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} - (n+1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = (n+1)! \times \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^{n+1}.$$

$$\boxed{\beta_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \beta_{n+1} = (n+1)\beta_n + (-1)^{n+1}.}$$

I.2.4 Les suites α et β ont même premier terme et vérifient une même relation de récurrence. Donc

$$\boxed{\text{les suites } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont égales.}}$$

I.3 Etude de ρ_n

I.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(\frac{1}{k!})$ est positive, décroissante, de limite nulle. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k!}$ est alternée. ρ_n est le reste à l'ordre n de cette série et on sait que le signe de la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ est le signe de son premier terme $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \text{ le signe de } \rho_n \text{ est } (-1)^{n+1}.}$$

I.3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait de plus que la valeur absolue de la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ est majorée par la valeur absolue de son premier terme. Ceci s'écrit $|\rho_n| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|$ ou encore $n!|\rho_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si par l'absurde on a l'égalité, alors ρ_n est un rationnel. Mais alors $e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \rho_n$ est aussi rationnel ce qui n'est pas. Donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |\rho_n| < \frac{1}{n+1}.}$$

1.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|n!e^{-1} - \beta_n| = \left|n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right| = \left|n!\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right| = n!|\rho_n| < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |n!e^{-1} - \beta_n| < \frac{1}{2}.$$

Comme d'autre part β_n est un entier relatif d'après la question I.2.2, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \beta_n \text{ est l'entier le plus proche de } e^{-1}n!.}$$

I.4 Etude d'une fonction

I.4.1 Sur $]-1,1[$, l'équation différentielle proposée est équivalente à l'équation différentielle $y' - \frac{x}{1-x}y = 0$. Puisque la fonction $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ est continue sur $]-1,1[$, le théorème de Cauchy permet d'affirmer qu'il existe une et une seule fonction f définie et dérivable sur $]-1,1[$, solution sur $]-1,1[$ de l'équation $(1-x)y' - xy = 0$ et vérifiant la condition initiale $f(0) = 1$.

Déterminons alors la fonction f. Pour $x \in]-1,1[$, posons $a(x) = -\frac{x}{1-x}$. On a $a(x) = \frac{-x+1-1}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x}$. Par suite, une primitive de a sur $]-1,1[$ est la fonction $A\ :\ x \mapsto x + \ln(1-x)$. Mais alors

$$\begin{aligned}
f \text{ solution} &\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ f'(x) + a(x)f(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ e^{A(x)}f'(x) + a(x)e^{A(x)}f(x) = 0 \\
&\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (e^A f)'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ e^{A(x)}f(x) = e^{A(0)}f(0) \\
&\Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ (1-x)e^x f(x) = 1 \Rightarrow \forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.}$$

I.4.2 f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $]-1,1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-1,1[$.

1.4.3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout x de $]-1,1[$, on a $(1-x)f(x) = e^{-x}$. En dérivant $n+1$ fois cette égalité grâce à la formule de Leibniz, on obtient

$$(1-x)f^{(n+1)}(x)-(n+1)f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}e^{-x}.$$

1.4.4 Soit $n\in\mathbb{N}$. En évaluant en 0, on obtient $f^{(n+1)}(0)=(n+1)f^{(n)}(0)+(-1)^{n+1}$. En tenant compte de $f^{(0)}(0)=1$, la suite $(f^{(n)}(0))$ est donc la suite (α_n) ou encore la suite (β_n) d''après la question I.2.4.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ f^{(n)}(0)=\beta_n.}$$

II La suite γ

II.1 $\mathcal{S}_1$ ne contient que l'identité du singleton $\{1\}$ et donc pas de permutation sans point fixe. Donc $\gamma_1=0$. S_2 est constitué de l'identité de la paire $\{1,2\}$ et de la transposition $\tau_{1,2}$. $\tau_{1,2}$ est sans point fixe et donc $\gamma_2=1$.

$$\boxed{\gamma_1=0 \text{ et } \gamma_2=1.}$$

II.2 S_3 est composé de l'identité de $\{1,2,3\}$ qui a trois points fixes, des trois transpositions $\tau_{1,2}$, $\tau_{1,3}$ et $\tau_{2,3}$ qui ont exactement un point fixe et des deux permutations circulaires (2 3 1) et (3 1 2) qui n'ont pas de point fixe. Ainsi,

$$\boxed{\gamma_3=2.}$$

II.3
II.3.1 Soit σ une permutation de $\{1,2,3,4\}$. σ a exactement deux points fixes si et seulement si σ fixe deux éléments a et b de $\{1,2,3,4\}$ et la restriction de σ à $\{1,2,3,4\}\setminus\{a,b\}$ est une permutation sans point fixe de $\{1,2,3,4\}\setminus\{a,b\}$. Comme il y a $\binom{4}{2}=6$ choix des deux points fixes et que $\gamma_2=1$, le nombre de permutations de $\{1,2,3,4\}$ ayant exactement deux points fixes est $\binom{4}{2}\times\gamma_2=6$.

$$\boxed{\mathcal{S}4 \text{ contient } 6 \text{ permutations ayant exactement deux points fixes.}}$$

II.3.2 Soit σ une permutation de $\{1,2,3,4\}$. σ a exactement un point fixe si et seulement si σ fixe un éléments a de $\{1,2,3,4\}$ et la restriction de σ à $\{1,2,3,4\}\setminus\{a\}$ est une permutation sans point fixe de $\{1,2,3,4\}\setminus\{a\}$. Comme il y a $\binom{4}{1}=4$ choix du point fixe et que $\gamma_3=2$, le nombre de permutations de $\{1,2,3,4\}$ ayant exactement un point fixe est $\binom{4}{1}\times\gamma_3=8$.

$$\boxed{\mathcal{S}4 \text{ contient } 8 \text{ permutations ayant exactement un point fixe.}}$$

II.3.3 Il y a $4!=24$ permutations de $\{1,2,3,4\}$. Une permutation a 4 points fixes. Aucune n'a exactement trois points fixes (car le point restant est obligatoirement fixe). 6 ont exactement deux points fixes et 8 en ont exactement 1. Donc $\gamma_4=24-6-8-1=9$.

$$\boxed{\gamma_4=9.}$$

II.4 Relation entre les γ_k
II.4.1 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{card}(\mathcal{S}_n)=n!$.

II.4.2 Soit $\sigma\in\mathcal{S}_n$. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. σ a exactement k points fixes si et seulement si σ fixe k éléments $a_1,\ldots,a_k$ de $[\![1,n]\!]$ et la restriction de σ à $[\![1,n]\!]\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}$ est une permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!]\setminus\{a_1,\ldots,a_k\}$. Comme il y a $\binom{n}{k}$ choix des k points fixes, le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes est $\binom{n}{k}\times\gamma_k$.

II.4.3 En classant les permutations de $[\![1,n]\!]$ en fonction du nombre de leurs points fixes, on a alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\gamma_k=\text{card}(\mathcal{S}_n)=n!$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\gamma_k=n!.}$$

II.5

II.5.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $0 \leq \gamma_n \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k = n!$ et donc $0 \leq \frac{\gamma_n}{n!} \leq 1$. Ceci montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

II.5.2 h est développable en série entière sur $]-1,1[$ en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$. Effectuons alors le produit de Cauchy des deux séries entières de l'énoncé. Pour $x \in]-1,1[$, on obtient

$$\begin{aligned} h(x) = e^x g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{\gamma_k}{k!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \end{aligned}$$

II.5.3 Pour $x \in]-1,1[$, on a donc $e^x g(x) = \frac{1}{1-x}$ puis $g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = f(x).}$$

On sait déjà que le rayon R de la série de somme g est supérieur ou égal à 1. Mais $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty$ et on a aussi $R \leq 1$. Finalement

$$\boxed{R = 1.}$$

II.5.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question I.4.4, on a

$$\frac{\gamma_n}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\beta_n}{n!},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \gamma_n = \beta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.}$$

II.5.5 Quand n tend vers $+\infty$, $\frac{\gamma_n}{n!} = \frac{\beta_n}{n!}$ tend vers $\frac{1}{e} \neq 0$. La série de terme général $\frac{\gamma_n}{n!}$ est donc grossièrement divergente.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'est pas définie en } 1.}$$

II.5.6 De même $\left| \frac{(-1)^n \gamma_n}{n!} \right|$ ne tend pas vers 0 et la série de terme général $\frac{(-1)^n \gamma_n}{n!}$ est grossièrement divergente.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ n'est pas définie en } -1.}$$

II.5.7 $\gamma_5 = \alpha_5 = 5\alpha_4 - 1 = 44$, $\gamma_6 = 6\gamma_5 + 1 = 265$, $\gamma_7 = 7\gamma_6 - 1 = 1854$ puis $\gamma_8 = 8\gamma_7 + 1 = 14833$.

$$\boxed{\gamma_8 = 14833.}$$

III Sur $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$

III.1 La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$

III.1.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $0 \leq J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx \leq \int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$. Comme $\dfrac{e}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} J_n = 0.}$$

III.1.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^{n+1}e^x \leq x^n e^x$ et donc par croissance de l'intégrale $J_{n+1} \leq J_n$. Ainsi, la suite $(J_n) = ((-1)^{n+1}v_n)$ est une suite positive décroissante de limite nulle. On en déduit que la série de terme général $v_n = (-1)^{n+1}J_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

III.2 Estimation intégrale de δ_n

III.2.1 La formule de Taylor-Laplace appliquée à $a = 0$, $b = x$ et la fonction $t \mapsto e^t$ fournit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt.}$$

III.2.2 En évaluant en -1 on obtient

$$\begin{aligned}
e^{-1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + \int_0^{-1} \frac{(-1-t)^n}{n!} e^t \, dt = \frac{\beta_n}{n!} - \frac{(-1)^n}{n!} \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^n}{n!} e^t \, dt \\
&= \frac{\beta_n}{n!} - \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{x-1} \, dx \text{ (en posant } x = 1+t) \\
&= \frac{\beta_n}{n!} - \frac{(-1)^n}{en!} J_n = \frac{\beta_n}{n!} + \frac{v_n}{en!},
\end{aligned}$$

et donc

$$\delta_n = n!e^{-1} - \beta_n = \frac{v_n}{e}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \delta_n = \frac{v_n}{e}.}$$

III.3 Sur la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \delta_n$ Puisque la série de terme général v_n est convergente, il en est de même de la série de terme général δ_n.

Déterminons un équivalent de J_n quand n tend vers $+\infty$. Une intégration parties fournit

$$J_{n+1} = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \, dx = e - (n+1)J_n.$$

Comme J_{n+1} tend vers 0, $(n+1)J_n$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$. Par suite

$$|v_n| = J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}.$$

On en déduit que la série de terme général $|v_n|$ diverge ou encore que la série de terme général v_n n'est pas absolument convergente. Il en est de même de la série de terme général δ_n.

III.4 Sur la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{|\delta_n|}{n}$

III.4.1 Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{|\delta_n|}{n}=\dfrac{|v_n|}{en}\sim\dfrac{1}{n^2}$. Par suite la série de terme général $\dfrac{|\delta_n|}{n}$ converge.

III.4.2

III.4.2.1 La fonction $x\mapsto e^x\ln(1-x)$ est continue sur $[0,1[$ et quand x tend vers 1 par valeurs inférieures,

$e^x\ln(1-x)=O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$. On en déduit l'existence de l'intégrale impropre A.

III.4.2.2 Pour tout réel x de $[0,1[$, on a

$$-e^x\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^ne^x}{n}.$$

Pour $x\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}^*$ posons alors $f_n(x)=\dfrac{x^ne^x}{n}$.

- chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$ (car prolongeable par continuité en 1)
- Puisque $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1x^ne^x\,dx=\frac{J_n}{n}=\frac{e|\delta_n|}{n}$, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1|f_n(x)|\,dx$ est convergente. D'après

un thèorème d'intégration terme à terme, on peut alors écrire

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_n}{n}=e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\delta_n|}{n},$$

et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|\delta_n|}{n}=\frac{A}{e}=-\frac{1}{e}\int_0^1e^x\ln(1-x)\,dx.}$$

III.4.3 Puisque $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}=o(\dfrac{1}{n^2})$, la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ est absolument convergente et donc convergente.

En posant $t=1-x$, on obtient déjà

$$A=-\int_0^1e^x\ln(1-x)\,dx=-\int_1^0e^{1-t}\ln t\ \times -dt=-e\int_0^1e^{-t}\ln t\,dt.$$

Pour tout réel t de $]0,1]$, on a

$$-e^{-t}\ln t=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{(-t)^n\ln t}{n!}.$$

Pour $t\in]0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$ posons alors $g_n(t)=-(-1)^n\dfrac{t^n\ln t}{n!}$.

- Chaque fonction g_n est continue et intégrable sur $]0,1]$ (car dominée par $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ en 0).
- Calculons alors $K_n=n!\displaystyle\int_0^1|g_n(t)|\,dt=\int_0^1-t^n\ln t\,dt$.

  Soit ε un réel de $]0,1[$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}-\int_\varepsilon^1t^n\ln t\,dt&=\left[-\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1+\frac{1}{n+1}\int_\varepsilon^1t^n\,dt\\&=\frac{(\varepsilon)^{n+1}}{n+1}\ln(\varepsilon)+\frac{1}{(n+1)^2}\left(1-\varepsilon^{n+1}\right).\end{aligned}$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $-\int_0^1 t^n \ln t \, dt = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ et finalement $\int_0^1 |g_n(t)| \, dt = \dfrac{1}{n!(n+1)^2}$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |g_n(t)| \, dt < +\infty$ et d'après un théorème d'intégration terme à terme, on a

$$A = e \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 g_n(t) \, dt = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} \text{ puis } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2} = \frac{A}{e} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n}.$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\delta_n|}{n} = \frac{A}{e} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}.}$$

III.4.4 Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après une majoration classique du reste à l'ordre n d'une série alternée

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)^2}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)^2}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)^2}\right| \\ &\leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(n+2)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)!(n+2)^2}.\end{aligned}$$

Pour $n = 3$, on obtient $\dfrac{1}{(n+1)!(n+2)^2} = \dfrac{1}{600}$ et donc $\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{|\delta_k|}{k} - \sum_{k=0}^{3} \dfrac{(-1)^k}{k!(k+1)^2}\right| \leq \dfrac{1}{600}$. Comme

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} = \frac{229}{288},$$

on a montré que

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\delta_k|}{k} - \frac{229}{288}\right| \leq \frac{1}{600}.}$$

