SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE (ENSI)

FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1 Soit y une solution de (E) sur I. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, y est n fois dérivable sur I.

- Par définition y est deux fois dérivable sur I et en particulier une fois dérivable sur I.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que y soit n fois dérivable sur I. Alors, puisque φ est de classe C^∞ sur I, $y'' = -\varphi y$ est n fois dérivable sur I ou encore y est $n+2$ fois dérivable sur I. En particulier, y est $n+1$ fois dérivable sur I.

On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, y est n fois dérivable sur I.

$$\boxed{\text{Toute solution de } (E) \text{ sur I est de classe } C^\infty \text{ sur I.}}$$

I.2 Soit y une solution de (E) sur I. Pour $x \in$ I, posons $z(x) = y(-x)$. Puisque y est deux fois dérivable sur I et que I est symétrique par rapport à l'origine, z est deux fois dérivable sur I. De plus, pour $x \in$ I, $z'(x) = -y'(-x)$ puis, comme φ est paire,

$$z''(x) = y''(-x) = -\varphi(-x)y(-x) = -\varphi(x)y(-x) = -\varphi(x)z(x).$$

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est une solution de } (E) \text{ sur I, la fonction } x \mapsto y(-x) \text{ est une solution de } (E) \text{ sur I.}}$$

I.3 Puisque φ est continue sur I, le théorème de CAUCHY permet d'affirmer que pour tout $(x_0, y_0, z_0) \in \text{I} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une solution y de (E) sur I et une seule telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = z_0$. On en déduit l'existence et l'unicité de f_0 et f_1.

Pour $x \in$ I, posons $g_0(x) = f_0(-x)$. D'après la question précédente, g_0 est une solution de (E) sur I. De plus, $g_0(0) = f_0(0) = 1$ et $g_0'(0) = -f_0'(0) = 0 = f_0'(0)$. D'après le théorème de CAUCHY, $g_0 = f_0$ et donc f_0 est paire.
De même, pour $x \in$ I, posons $g_1(x) = -f_1(-x)$. g_1 est une solution de (E) sur I d'après I.2. et puisque (E) est une équation linéaire homogène. De plus, $g_1(0) = -f_1(0) = 0 = f_1(0)$ et $g_1'(0) = f_1'(0) = 1$. D'après le théorème de CAUCHY, $g_1 = f_1$ et donc f_1 est impaire.

$$\boxed{f_0 \text{ est paire et } f_1 \text{ est impaire.}}$$

Montrons que la famille (f_0, f_1) est libre. f_0 et f_1 sont deux solutions sur I de l'équation linéaire homogène du second ordre (E). Le wronskien de cette famille est défini pour tout réel x de I par

$$w(x) = f_0(x)f_1'(x) - f_1(x)f_0'(x).$$

On a $w(0) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 \neq 0$. On sait alors que la famille (f_0, f_1) est libre. Comme l'ensemble $\mathscr{S}_\text{I}$ des solutions de (E) sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, (f_0, f_1) est une base de $\mathscr{S}_\text{I}$. Finalement

$$\boxed{\mathscr{S}_\text{I} = \{\lambda f_0 + \mu f_1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.}$$

Par unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, les solutions de (E) sur I qui sont paires (resp. impaires) sont les fonctions λf_0, $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. μf_1, $\mu \in \mathbb{R}$).

I.4 I.4.1. u est dérivable sur I en tant que quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I. De plus,

$$u' = \frac{f_0 f_1' - f_1 f_0'}{f_0^2} = \frac{w}{f_0^2},$$

où w est le wronskien de la famille (f_0, f_1). Puisque la famille (f_0, f_1) est une base de l'espace $\mathscr{S}_I$, on sait que w ne s'annule pas sur I. Il en est de même de u'.

$$\boxed{u' \text{ ne s'annule pas sur I.}}$$

On a ensuite

$$u'' = w' \times \frac{1}{f_0^2} + w \times \frac{-2f_0'}{f_0^3}$$

avec

$$w' = f_0 f_1'' + f_0' f_1' - f_0' f_1' - f_1 f_0'' = -f_0 \varphi f_1 + f_1 \varphi f_0 = 0.$$

Par suite,

$$u'' = w \times \frac{-2f_0'}{f_0^3} = -2 \times \frac{w}{f_0^2} \times \frac{f_0'}{f_0} = -2u' \frac{f_0'}{f_0}.$$

$$\boxed{\frac{u''}{u'} = -2\frac{f_0'}{f_0}.}$$

I.4.2. Puisque $w' = 0$, w est constante et donc $\forall x \in I,\ w(x) = w(0) = 1$.
I.4.3. Mais alors $u' = \dfrac{w}{f_0^2} = \dfrac{1}{f_0^2}$ puis $u = u(0) + u_0 = u_0$ et finalement

$$\boxed{f_1 = f_0 u_0.}$$

I.5 **I.5.1.** Puisque la fonction $y\ :\ x \mapsto \cos^2 x$ est solution de (E) sur I et vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, c'est la fonction f_0. De plus, pour tout réel x, $f_0(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ et donc $f_0''(x) = -2\cos(2x) = -4f_0(x) + 1$ puis

$$\varphi(x) = -\frac{f_0''(x)}{f_0(x)} = -4 + \frac{1}{f_0(x)} = -4 + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f_0(x) = \cos^2 x \text{ et } \varphi(x) = -4 + \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

I.5.2. Pour $x \in I$,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \int_0^x \frac{1}{f_0^2(t)}\,dt = \int_0^x \frac{1}{\cos^4 t}\,dt = \int_0^x (1 + \tan^2 t)\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int_0^x (1 + \tan^2 t)\tan' t\,dt \\ &= \left[\tan t + \frac{\tan^3 t}{3}\right]_0^x = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ u_0(x) = \tan x + \frac{\tan^3 x}{3}.}$$

I.5.3. Pour $x \in I$,

$$f_1(x) = f_0(x)u_0(x) = \cos^2 x\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right),$$

et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} = \left\{x \mapsto \cos^2 x\left(\lambda + \mu\left(\tan x + \frac{\tan^3 x}{3}\right)\right)\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

PARTIE II

II.1 Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $z(x) = y(x+2\pi)$. Puisque φ est 2π-périodique, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$z''(x) = y''(x+2\pi) = -\varphi(x+2\pi)y(x+2\pi) = -\varphi(x)y(x+2\pi) = -\varphi(x)z(x).$$

Donc, la fonction z est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto y(x+2\pi) \text{ est une solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.2 Les fonction $x \mapsto f_0(x+2\pi)$ et $x \mapsto f_1(x+2\pi)$ sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. La famille (f_0, f_1) est une base de l'espace des solutions, il existe quatre réels w_{ij}, $1 \leq i, j \leq 1$, tels que pour tout réel x

$$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \text{ et } f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x).$$

Ensuite, $f_0(2\pi) = w_{00}f_0(0) + w_{10}f_1(0) = w_{00}$ et $f_0'(2\pi) = w_{00}f_0'(0) + w_{10}f_1'(0) = w_{10}$.
De même, $f_1(2\pi) = w_{01}f_0(0) + w_{11}f_1(0) = w_{01}$ et $f_1'(2\pi) = w_{01}f_0'(0) + w_{11}f_1'(0) = w_{11}$.

$$\boxed{\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad & f_0(x+2\pi) = f_0(2\pi)f_0(x) + f_0'(2\pi)f_1(x) \\ & f_1(x+2\pi) = f_1(2\pi)f_0(x) + f_1'(2\pi)f_1(x). \end{aligned}}$$

II.3 Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g = \lambda f_0 + \mu f_1$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} g(x+2\pi) &= \lambda f_0(x+2\pi) + \mu f_1(x+2\pi) = \lambda(w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)) + \mu(w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)) \\ &= (w_{00}\lambda + w_{01}\mu)f_0(x) + (w_{10}\lambda + w_{11}\mu)f_1(x). \end{aligned}$$

Puisque la famille (f_0, f_1) est libre,

$$\begin{aligned} g \text{ est } 2\pi\text{-périodique} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x+2\pi) = g(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (w_{00}\lambda + w_{01}\mu)f_0(x) + (w_{10}\lambda + w_{11}\mu)f_1(x) = \lambda f_0(x) + \mu f_1(x) \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w_{00}\lambda + w_{01}\mu = \lambda \\ w_{10}\lambda + w_{11}\mu = \mu \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \quad (S). \end{aligned}$$

Mais alors, (E) admet une solution 2π-périodique non nulle si et seulement si (S) admet une solution $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ non nulle ce qui équivaut au fait que 1 est valeur propre de la matrice W.

II.4 Soit g une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, non nulle et 2π-périodique. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $h(x) = g(x) + g(-x)$ et $k(x) = g(x) - g(-x)$.

• D'après I.2., la fonction $x \mapsto g(-x)$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Mais alors, puisque l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel, h et k sont deux solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout réel x, $h(x+2\pi) = g(x+2\pi) + g(-x-2\pi) = g(x) + g(-x) = h(x)$. Donc h est 2π-périodique et de même k est 2π-périodique.

• On ne peut avoir $h = k = 0$ car alors $g = h + k = 0$ ce qui n'est pas. Donc, l'une au moins des deux fonctions h ou k est non nulle.

• Puisque h est paire, h est proportionnelle à f_0. En effet, il existe deux réels λ et μ tels que $h = \lambda f_0 + \mu f_1$ avec $\mu = 0$ par unicité de la décomposition d'une fonction en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. De même, k est proportionnelle à f_1.

Par suite, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ tel que $h = \lambda f_0$ et $k = \mu f_1$. On a alors ou bien $f_0 = \dfrac{h}{\lambda}$ et f_0 est 2π-périodique, ou bien $f_1 = \dfrac{k}{\mu}$ et f_1 est 2π-périodique.

II.5 **II.5.1.** Soit $\Psi\ :\ \begin{array}{ccc}[-\pi,\pi]\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ (t,x) & \mapsto & e^{k\cos t\cos x}f_0(t)\end{array}$.

• Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $t\mapsto\Psi(t,x)$ est continue sur le segment $[-\pi,\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.

• La fonction Ψ est pourvue sur $[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$ de dérivées partielles premières et secondes par rapport à x et pour $(t,x)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)=-k\cos t\sin x\ e^{k\cos t\cos x}f_0(t),$$

et

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x)=-k\cos t\cos x\ e^{k\cos t\cos x}f_0(t)+k^2\cos^2 t\sin^2 x\ e^{k\cos t\cos x}f_0(t).$$

De plus,

- pour tout $x\in\mathbb{R}$, les fonctions $t\mapsto\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)$ et $t\mapsto\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x)$ sont continues sur le segment $[-\pi,\pi]$;
- pour tout $t\in[-\pi,\pi]$, les fonctions $x\mapsto\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)$ et $x\mapsto\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x)$ sont continues sur le segment $\mathbb{R}$;
-pour tout $(x,t)\in[-\pi,\pi]\times\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}(t,x)\right|\leq|k|e^{|k|}|f_0(t)|=\varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(t,x)\right|\leq(|k|+k^2)e^{|k|}|f_0(t)|=\varphi_2(t)$, les fonctions φ_1 et φ_2 étant continues sur $[-\pi,\pi]$ et donc intégrables sur $[-\pi,\pi]$.

D'après une généralisation du théorème de dérivation sous le signe somme, F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et F' et F'' s'obtiennent par dérivation sous le signe somme. De plus, F est clairement paire.

II.5.2. Pour $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a $K(x,t)=K(t,x)$. L'identité de l'énoncé s'en suit immédiatement.
On multiplie alors les deux membres de cette égalité par $f_0(t)$ et après intégration, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F''(x)+(a-k^2\sin^2 x)F(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2F}{\partial t^2}(x,t)f_0(t)\ dt+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t)f_0(t)\ dt.$$

Une double intégration par parties fournit alors pour $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2K}{\partial t^2}(x,t)f_0(t)\ dt&=\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)f_0(t)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)f_0'(t)\ dt\\&=\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)f_0(t)-K(x,t)f_0'(t)\right]_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)f_0''(t)\ dt\\&=\left[\frac{\partial K}{\partial t}(x,t)f_0(t)-K(x,t)f_0'(t)\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}K(x,t)\varphi(t)f_0(t)\ dt\\&=-\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t)f_0(t)\ dt.\end{aligned}$$

(le crochet est nul car toutes les fonctions considérées sont 2π-périodiques). Finalement, pour tout réel x,

$$F''(x)+(a-k^2\sin^2 x)F(x)=-\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t)f_0(t)\ dt+\int_{-\pi}^{\pi}(a-k^2\sin^2 t)K(x,t)f_0(t)\ dt=0.$$

$$\boxed{F\text{ est une solution paire de }(E)\text{ sur }\mathbb{R}.}$$

II.5.3. D'après I.3., il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $F=\lambda f_0$ ou encore

$$\boxed{\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in\mathbb{R},\ \int_{-\pi}^{\pi}e^{k\cos t\cos x}f_0(t)\ dt=\lambda f_0(x).}$$

PARTIE III

III.1 On sait que les solutions sur I de l'équation $y''+\omega^2y=0$ sont les fonctions de la forme $y\ :\ x\mapsto\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. De plus, $(y(0)=1$ et $y'(0)=0\Leftrightarrow\lambda=1$ et $\mu=0)$ et $(y(0)=0$ et $y'(0)=1\Leftrightarrow\lambda=0$ et $\omega\mu=1)$.

$$\boxed{\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ f_0(x)=\cos(\omega x)\text{ et }f_1(x)=\frac{1}{\omega}\sin(\omega x).}$$

III.2 La fonction $x \mapsto \sin x$ est un C^2-difféomorphisme de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1,1[$. Par suite, la fonction y est deux fois dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $]-1,1[$. De plus, pour $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $y'(x) = \cos x z'(\sin x)$ et

$$y''(x) = -\sin x z'(\sin x) + \cos^2 x z''(\sin x) = -\sin x\, z'(\sin x) + (1-\sin^2 x) z''(\sin x).$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ y''(x) + \omega^2 y(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ (1-\sin^2 x) z''(\sin x) - \sin x\, z'(\sin x) + \omega^2 z(\sin x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall X \in]-1,1[,\ (1-X^2) z''(X) - X\, z'(X) + \omega^2 z(X) = 0.
\end{aligned}$$

III.3

III.3.1 Notons R le rayon de la série entière $\sum a_n X^n$ et supposons $R > 0$. Pour $X \in]-R, R[\cap]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
(1-X^2) z''(X) - X\, z'(X) + \omega^2 z(X) &= (1-X^2) \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n X^{n-2} - X \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n X^{n-1} + \omega^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n X^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n X^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n X^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^2 a_n X^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n X^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - \omega^2) a_n X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} X^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 - \omega^2) a_n X^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n^2 - \omega^2) a_n\right] X^n.
\end{aligned}$$

Mais alors, par unicité des coefficients d'un développement en série entière,

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E') \text{ sur }]-1,1[&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1) a_{n+2} - (n^2 - \omega^2) a_n \\
&\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n^2 - \omega^2}{(n+2)(n+1)} a_n \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - \omega^2}{(2p)(2p-1)} a_{2p-2} \quad \text{(I)} \quad \text{et } a_{2p+1} = \frac{(2p-1)^2 - \omega^2}{(2p+1)(2p)} a_{2p-1} \quad \text{(II)}.
\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\text{(I)} &\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{(2p-2)^2 - \omega^2}{(2p)(2p-1)} \frac{(2p-4)^2 - \omega^2}{(2p-2)(2p-3)} \cdots \frac{(0)^2 - \omega^2}{(2)(1)} a_0 \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1} ((2k)^2 - \omega^2)\right) a_0.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\text{(II)} &\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{(2p-1)^2 - \omega^2}{(2p+1)(2p)} \frac{(2p-3)^2 - \omega^2}{(2p-1)(2p-2)} \cdots \frac{(1)^2 - \omega^2}{(3)(2)} a_1 \\
&\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1} ((2k+1)^2 - \omega^2)\right) a_1.
\end{aligned}$$

Si $a_0 = a_1 = 0$, alors les relations précédentes montrent que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 0$.
Si z est une solution polynomiale non nulle de (E'), il est donc nécessaire que $a_0 \neq 0$ ou $a_1 \neq 0$.

Ensuite, si $a_0 \neq 0$, puisque $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!}\left(\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - \omega^2)\right) a_0$, si z est une solution polynomiale non nulle de (E'), il est nécessaire que ω soit l'un des $2p$, $p \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si $\omega = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, en prenant $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, a_{2k} est nul pour $k \geq p+1$ et a_{2k+1} est nul pour tout k. Dans ce cas, z est une solution polynomiale non nulle de (E') sur $]-1,1[$.
De même, si $a_1 \neq 0$ et si z est une solution polynomiale non nulle de (E'), il est nécessaire que ω soit l'un des $2p+1$, $p \in \mathbb{N}$. Réciproquement, si $\omega = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$, en prenant $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, a_{2k+1} est nul pour $k \geq p+1$ et a_{2k} est nul pour tout k. Dans ce cas aussi, z est une solution polynomiale non nulle de (E') sur $]-1,1[$.

(E') admet des solutions polynomiales non nulles si et seulement si $\omega \in \mathbb{N}$.

Posons $z_0(x) = 1 + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - \omega^2)\right) x^{2p}$ et $z_1(x) = x + \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2 - \omega^2)\right)$ et déterminons les rayons de convergence associé à chacune de ces deux séries entières.

• Si ω est un entier pair, z_0 est un polynôme et la série entière considérée a un rayon infini. Sinon, aucun des a_{2p} n'est nul et pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{2p+2}x^{2p+2}}{a_{2p}x^{2p}}\right| = \frac{|(2p)^2 - \omega^2|}{(2p+2)(2p+1)}x^2 \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{4p^2}{4p^2}x^2 = x^2.$$

D'après la règle de d'ALEMBERT, la série numérique de somme $z_0(x)$ converge quand $|x| < 1$ ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière de somme z_0 est supérieur ou égal à 1.
Ainsi, dans tous les cas, le rayon de convergence de la série entière de somme z_0 est supérieur ou égal à 1.

• Si ω est un entier impair, z_1 est un polynôme et la série entière considérée a un rayon infini. Sinon, aucun des a_{2p+1} n'est nul et pour $x \neq 0$,

$$\left|\frac{a_{2p+1}x^{2p+1}}{a_{2p-1}x^{2p-1}}\right| = \frac{|(2p-1)^2 - \omega^2|}{(2p+1)(2p)}x^2 \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{4p^2}{4p^2}x^2 = x^2.$$

La série numérique de somme $z_1(x)$ converge quand $|x| < 1$ ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière de somme z_1 est supérieur ou égal à 1.
Ainsi, dans tous les cas, le rayon de convergence de la série entière de somme z_1 est supérieur ou égal à 1.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n X^n$ est supérieur ou égal à 1.

III.3.2. Les fonctions $X \mapsto -\dfrac{X}{1-X^2}$ et $X \mapsto \dfrac{\omega^2}{1-X^2}$ sont continues sur $]-1,1[$. On sait alors que les solutions de (E') sur $]-1,1[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.
Les foncions z_0 et z_1 sont deux solutions indépendantes de (E') sur $]-1,1[$ car z_0 est non nulle et paire et z_1 est non nulle et impaire. On en déduit que (z_0, z_1) est une base de l'espace des solutions de (E') sur $]-1,1[$.

$$\mathscr{S}'_{]-1,1[} = \{\lambda z_0 + \mu z_1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

La fonction $y\ :\ x \mapsto \cos(\omega x)$ est une solution de (E) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc, la fonction $z\ :\ X \mapsto y(\operatorname{Arcsin} X)$ est une solution de (E') sur $]-1,1[$ et il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\omega x) = \lambda z_0(\sin x) + \mu z_1(\sin x)$. y est paire et donc $\mu = 0$ puis pour $x = 0$, $1 = \lambda z_0(0) = \lambda$ et donc $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\cos(\omega x) = z_0(\sin x)$.
De même, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(\omega x) = \lambda z_0(\sin x) + \mu z_1(\sin x)$ avec $\lambda = 0$ car la fonction $x \mapsto \sin(\omega x)$ est impaire. D'autre part, quand x tend vers 0, $\omega x \sim \sin(\omega x) = \mu z_1(\sin x) \sim \mu x$ et donc $\mu = \omega$.

$$\forall \omega \in]0, +\infty[,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(\omega x) = 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - \omega^2)\right)\sin^{2p} x$$
$$\forall \omega \in]0, +\infty[,\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(\omega x) = \omega \sin x + \omega \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2 - \omega^2)\right)\sin^{2p+1} x.$$

III.3.3. Si $\omega = 2m$, $m \in \mathbb{N}^*$, on obtient pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\cos(2mx) = 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - (2m)^2)\right) \sin^{2p} x = P_m(\sin x),$$

où $P_m = 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - (2m)^2)\right) X^{2p}$. P_m est un polynôme pair de degré $2m$. Comme P_m est pair, la fonction $x \mapsto P_m(\sin x)$ est π-périodique de même que la fonction $x \mapsto \cos(2mx)$. L'égalité $\cos(2mx) = P_m(\sin x)$ reste donc valable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par continuité puis sur $\mathbb{R}$ par π-périodicité.

De même, si $\omega = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$, on obtient pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin((2m+1)x) = (2m+1)\sin x + (2m+1) \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p+1)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2 - (2m+1)^2)\right) \sin^{2p+1} x = Q_m(\sin x),$$

où $Q_m = (2m+1)X + (2m+1) \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p+1)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2 - (2m+1)^2)\right) X^{2p+1}$. Q_m est un polynôme impair de degré $2m+1$. Comme Q_m est impair, la fonction $x \mapsto Q_m(\sin x)$ est π-antipériodique de même que la fonction $x \mapsto \sin((2m+1)x)$. L'égalité $\sin((2m+1)x) = Q_m(\sin x)$ reste donc valable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par continuité puis sur $\mathbb{R}$ par π-antipériodicité.

$$\boxed{\begin{gathered}\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(2mx) = 1 + \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k)^2 - (2m)^2)\right) \sin^{2p} x \\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sin((2m+1)x) = (2m+1)\sin x + (2m+1) \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{(2p+1)!} \left(\prod_{k=0}^{p-1}((2k+1)^2 - (2m+1)^2)\right) \sin^{2p+1} x.\end{gathered}}$$

