SESSION 2007

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

EXERCICE

a. f est continue sur le compact $[0,1]^2$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]^2$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On sait alors que f admet un maximum sur ce compact.

b. f est de classe C^1 sur l'ouvert $]0,1[^2$. On sait alors que si f admet un maximum en un point (x_0,y_0) de cet ouvert, (x_0,y_0) est un point critique de f. Or, pour $(x,y)\in]0,1[^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{1+y^2}\times\frac{(1+x^2)-2x(x+y)}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2-2xy}{(1+y^2)(1+x^2)^2},$$

puis en échangeant les rôles de x et y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1-y^2-2xy}{(1+x^2)(1+y^2)^2}.$$

Par suite, pour $(x,y)\in]0,1[^2$,

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1-x^2-2xy=0\\ 1-y^2-2xy=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y^2=x^2\\ 1-x^2-2xy=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=x\\ 1-3x^2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ainsi, si f admet un maximum dans $]0,1[^2$, ce maximum est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2/\sqrt{3}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{9}{16}=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

c. Soient $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(0,1)$ et $D=(1,1)$.

- Pour $x\in[0,1]$, $f(x,0)=\dfrac{x}{1+x^2}$. Or $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Par suite, la fonction $x\mapsto f(x,0)$ est croissante sur $[0,1]$ et admet donc un maximum en 1 égal à $f(0,1)$ c'est-à-dire $\dfrac{1}{2}$. Donc f admet un maximum sur $[AB]$ égal à $\dfrac{1}{2}$.
- Pour $x\in[0,1]$, $f(x,1)=\dfrac{x+1}{2(1+x^2)}$. Or $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x+1}{2(1+x^2)}\right)(x)=\dfrac{(1+x^2)-2x(x+1)}{2(1+x^2)^2}=\dfrac{1-2x-x^2}{2(1+x^2)^2}$. Par suite, la fonction $x\mapsto f(x,1)$ est croissante sur $[0,\sqrt{2}-1]$, décroissante sur $[\sqrt{2}-1,1]$ et admet donc un maximum en $\sqrt{2}-1(\in[0,1])$ égal à $f(\sqrt{2}-1,1)$ avec

$$f(\sqrt{2}-1,1)=\frac{\sqrt{2}}{2(1+(\sqrt{2}-1)^2)}=\frac{\sqrt{2}}{2(4-2\sqrt{2})}=\frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}=0,6\ldots>\frac{1}{2}.$$

Ainsi, f admet sur $[AB]\cup[CD]$ un maximum égal à $\mathrm{Max}\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}\}$ ou encore $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$. Par symétrie des rôles de x et y, f admet un maximum sur $[AC]\cup[BD]$ égal à $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$ et finalement

$$\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur la frontière de } F \text{ est égal à } \frac{\sqrt{2}+1}{4}.}$$

On a $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} = 0,64\ldots$ et $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4} = 0,60\ldots$. Donc $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} > \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$ ce qui montre que

$$\boxed{M = \frac{3\sqrt{3}}{8}.}$$

PROBLÈME ; ÉCHANGES DE LIMITES ET D'INTÉGRALES

PARTIE PRÉLIMINAIRE

1. Fonction Gamma d'Euler

a. Soit $x \in]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue (et donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Quand t tend vers 0 par valeurs supérieures, $0 < e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$. Or, puisque $x-1 > -1$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0 et on en déduit que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de 0.
- Quand t tend vers $+\infty$, $e^{-t}t^{x-1} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'après les théorèmes de croissances comparées. On en déduit que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$.

Finalement

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \text{la fonction } t \mapsto e^{-t}t^{x-1} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[.}$$

b. Soit $x > 0$. Soient ε et A deux réels tels que $0 < \varepsilon < A$. Les deux fonctions $t \mapsto t^x$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_{\varepsilon}^{A} t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{\varepsilon}^{A} + x\int_{\varepsilon}^{A} t^{x-1}e^{-t}\,dt = -A^x e^{-A} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon}.$$

Puisque $x > 0$, quand ε tend vers 0 et A tend vers $+\infty$ on obtient

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x).$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$$

Ensuite $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$ et puisque pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Gamma(n) = (n-1)!.}$$

2. Fonction zêta de Riemann

a. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1,+\infty[$. Par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ sur $]0,+\infty[$ on a

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^x}\,dt = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^x}\,dt = \left[\frac{-1}{(x-1)t^{x-1}}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{(x-1)n^{x-1}} \text{ (car } x-1>0).$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]1,+\infty[,\ R_n(x) \leq \frac{1}{(x-1)n^{x-1}}.}$$

b. Soient p un entier supérieur ou égal à 2 et $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} - \zeta(p)\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = R_n(p) \leq \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Mais alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\zeta(p)\right|\leq\varepsilon\Leftarrow\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}\leq\varepsilon\Leftrightarrow n^{p-1}\geq\frac{1}{(p-1)\varepsilon}\Leftarrow n\geq\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\Leftarrow n\geq E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right)+1.$$

$$\boxed{\text{Pour } n\geq E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right)+1,\ \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}-\zeta(p)\right|\leq\varepsilon.}$$

c. Si n est un entier non nul donné tel que $\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^7}-\zeta(7)\right|\leq\frac{10^{-6}}{2}$, une valeur approchée de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^7}$ à $\frac{10^{-6}}{2}$ (c'est-à-dire arrondie à la sixième décimale la plus proche) est une valeur approchée de $\zeta(7)$ à 10^{-6} près. Or pour $\varepsilon=\frac{10^{-6}}{2}$ et $p=7$

$$E\left(\sqrt[p-1]{\frac{1}{(p-1)\varepsilon}}\right)+1=E\left(\sqrt[6]{\frac{10^6}{3}}\right)+1=9.$$

La machine fournit $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k^7}=1{,}008\ 349\ 0\ldots$ ou encore $1{,}008\ 349$ arrondi à la sixième décimale la plus proche. Donc

$$\boxed{\zeta(7)=1{,}008\ 349 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}}$$

PREMIÈRE PARTIE : SUITE DE FONCTIONS

3 Théorème de convergence uniforme pour les suites de fonctions. Pour chaque n, le fonction f_n est continue sur le segment $[a,b]$ et donc la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)$ est définie. Puisque la suite de fonctions continues (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, la fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et donc $\int_a^b f(x)\ dx$ existe. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $M_n=\sup\limits_{[a,b]}|f_n-f|$. Puisque chaque fonction f_n-f est continue sur le segment $[a,b]$ la suite , la suite (M_n) est définie et puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$, la suite (M_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Or pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\left|\int_a^b f_n(x)\ dx-\int_a^b f(x)\ dx\right|=\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\ dx\right|\leq\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\ dx\leq M_n(b-a).$$

Comme $M_n(b-a)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite de réels $\left(\int_a^b f_n(x)\ dx\right)$ converge vers le réel $\int_a^b f(x)\ dx$.

4. Exemples et contre-exemples. **a.** Soit $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Soit f_n la fonction définie et continue sur $[0,1]$, nulle sur $[\frac{2}{n},1]$, affine sur $[0,\frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$ telle que $f(0)=0$, $f(\frac{1}{n})=n$, $f(\frac{2}{n})=0$. Pour $x\in[0,1]$, on a précisément

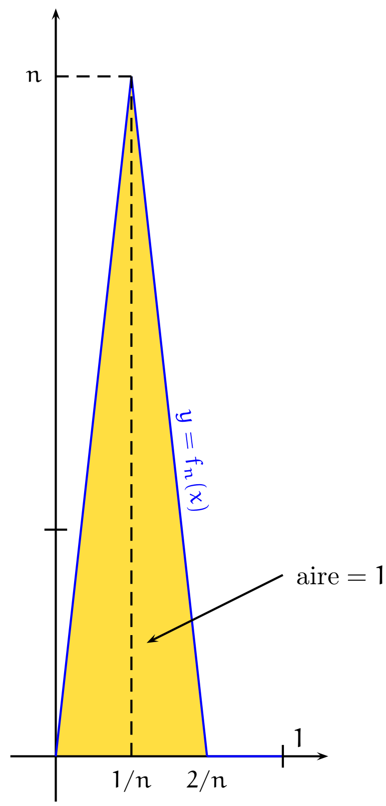
$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x \text{ si } x\in[0,\frac{1}{n}]\\ -n^2(x-\frac{2}{n}) \text{ si } x\in[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]\\ 0 \text{ si } x\in[\frac{2}{n},1]\end{cases}.$$

- $\int_0^1 f_n(x)\ dx$ est l'aire du triangle joignant les points $(0,0)$, $(\frac{1}{n},n)$ et $(\frac{2}{n},0)$. Cette aire vaut $\frac{(2/n)\times n}{2}$ c'est-à-dire 1.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\ dx=1$.

• Pour $n \geq 2$, $f_n(0) = 0$ et donc la suite $(f_n(0))$ converge vers 0. D'autre part, si $x \in]0, 1]$, dès que $n \geq \frac{2}{x}$, on a $\frac{2}{n} \leq x$ et donc $f_n(x) = 0$. La suite $(f_n(x))$ est nulle à partir d'un certain rang et en particulier converge vers 0. Ainsi, pour tout réel x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 ou encore la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$.

• f est ici la fonction nulle et donc $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0 \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$.



b. Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = x^n$. Puisque $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$. D'autre part, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par : $\forall x \in [0, 1],\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1[\\ 1 \text{ si } x = 1 \end{cases}$. Puisque f est continue par morceaux sur $[0, 1]$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe et de plus $\displaystyle\int_0^1 0\,dx = 0$ (intégrale d'une fonction en escaliers). Par suite ici

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Enfin, la suite de fonctions $f_n)$ ne peut converger uniformément vers f sur $[0, 1]$ car chaque fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ alors que f ne l'est pas.

5. Cas d'un intervalle quelconque. **a.** • Chaque fonction f_n est continue sur $[0, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$. Donc chaque fonction f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. De plus, d'après la question 1.b., pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = \frac{1}{n!} \times \Gamma(n+1) = 1.$$

Ainsi la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$.

• D'autre part si x est un réel positif donné, la suite numérique $(f_n(x))$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ d'après les théorèmes de croissances comparées ($x^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$).

Ainsi, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction nulle. Mais alors ici

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = 0 \neq \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx.$$

• Vérifions enfin que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \geq 0$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}(nx^{n-1} - x^n)e^{-x} = (n - x)\frac{x^{n-1}e^{-x}}{n!}.$$

La fonction f_n est donc croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. On en déduit que pour $x \geq 0$

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty = \dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$. Enfin d'après la formule de Stirling

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$ ce qui montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
Le **TH 1** est donc faux quand l'intervalle I n'est pas borné.

b. De nouveau, la fonction f est continue sur l'intervalle I en tant que limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continues sur I.

i. Puisque la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle I, la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)$ est définie à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par suite, il existe un entier p tel que $\|f_p - f\|_\infty \leq 1$.
Soit alors $x \in [0, +\infty[$.

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x)| \leq \|f_p - f\|_\infty + |f_p(x)| \leq 1 + |f_p(x)|.$$

De nouveau, la fonction f est continue sur l'intervalle I en tant que limite uniforme sur I d'une suite de fonctions continues sur I. De plus la fonction $|f|$ est majorée sur I par la fonction $1+|f_p|$ qui est intégrable sur I en tant que somme de fonctions intégrables sur I (la fonction $x \mapsto 1$ est intégrable sur I car bornée sur I borné).
Finalement f est intégrable sur I.

ii. Pour n suffisamment grand, $\|f_n - f\|_\infty$ existe et

$$\left|\int_I f_n(x)\ dx - \int_I f(x)\ dx\right| = \left|\int_I (f_n(x) - f(x))\ dx\right| \leq \int_I |f_n(x) - f(x)|\ dx \leq \int_I \|f_n - f\|_\infty\ dx = \ell(I) \times \|f_n - f\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et le **TH 1** reste vrai dans le cas où l'intervalle I est borné.

6. Théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions.
a. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur l'intervalle I et est majorée en valeur absolue par la fonction φ qui est intégrable sur I. On en déduit que chaque fonction f_n est intégrable sur I.
Soit $x \in I$. Pour tout entier n, on a $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ et quand n tend $+\infty$ on obtient $|f(x)| \leq \varphi(x)$. Ainsi la fonction f est par hypothèse continue par morceaux sur I et majorée en valeur absolue sur I par la fonction φ qui est intégrable sur I. On en déduit que f est aussi intégrable sur I.

b. i. Pour $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] = I$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = \sin^n x$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f définie par $\forall x \in I,\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[\\ 1 \text{ si } x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur I et majorée en valeur absolue par la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto 1$ qui est intégrable sur l'intervalle I. De plus la fonction f est continue par morceaux sur I. D'après le **TH 2**,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x\ dx = \int_0^{\pi/2} f(x)\ dx = 0.$$

On sait que ce résultat classique sur les intégrales de WALLIS est plus pénible à obtenir directement.

ii. Chaque fonction f_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. La suite de fonctions f_n converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. De plus chaque fonction est majorée en valeur absolue sur I par la fonction $\varphi\ :\ x\mapsto \dfrac{e}{1+x^2}$ qui est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$. D'après le **TH 2**

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin(\frac{x}{n})}}{1+x^2}\ dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\ dx=[\text{Arctan}\, x]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}.$$

DEUXIÈME PARTIE : SÉRIE DE FONCTIONS

7. Théorème de convergence uniforme pour les séries de fonctions. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f_k$. Chaque fonction S_n est continue sur $[a,b]$ et par linéarité de l'intégrale, pour $N\in\mathbb{N}$ on a

$$\sum_{n=0}^{N}\int_a^b f_k(x)\ dx=\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{N}f_n(x)\right)\ dx=\int_a^b S_N(x)\ dx.$$

Par hypothèse, la suite de fonctions (S_N) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$. La fonction f est alors continue sur le segment $[a,b]$ et de plus d'après le **TH 1**, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}=\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\int_a^b f_n(x)\ dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ ou encore la série de terme général $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\ dx$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^b f_n(x)\ dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)\ dx.$$

8. Application : séries trigonométriques et séries de Fourier.

a. Le théorème de PARSEVAL dit que si f est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, alors la série de terme général $a_n^2+b_n^2$ converge et

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f^2(x)\ dx.$$

Ici, $a_n^2+b_n^2=0^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\dfrac{1}{n}$ et donc la série de terme général $a_n^2+b_n^2$ diverge. La série trigonométrique de l'énoncé n'est donc pas la série de FOURIER d'une fonction fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.

b. Pour $x\in\mathbb{R}$, posons $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus f est 2π-périodique. Calculons alors les coefficients de FOURIER de f.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après le **TH 3**, on peut intégrer terme à terme sur le segment $[a,b]$ et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos(nx)\ dx&=\frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nx)\ dx+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(a_p\int_0^{2\pi}\cos(nx)\cos(px)\ dx+b_p\int_0^{2\pi}\cos(nx)\sin(px)\ dx\right)\\&=0+\frac{1}{\pi}\times\pi a_n=a_n,\end{aligned}$$

Pour $n=0$, on a également $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos(0x)\ dx=\dfrac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ dx+0=a_0$.

De même pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\ dx = \frac{a_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(a_p\int_0^{2\pi}\sin(nx)\cos(px)\ dx + b_p\int_0^{2\pi}\sin(nx)\sin(px)\ dx\right)$$
$$= 0 + \frac{1}{\pi}\times\pi b_n = b_n.$$

Finalement, une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et est sa propre série de Fourier.

9. Intégration terme à terme d'une série de fonctions.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque la série de terme général a_n converge, a_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Mais alors $\frac{a_n x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{x^n}{n!}\right)$. On sait que la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ converge et on en déduit que la série de terme général $\frac{a_n x^n}{n!}$ converge ou encore que la série de fonctions de terme général $f_n\ :\ x \mapsto \frac{a_n x^n}{n!}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$.

Mais alors f est la somme sur $\mathbb{R}$ d'une série entière de rayon infini et on sait que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons g_n la fonction $g_n\ :\ x \mapsto f_n(x)e^{-x}$. Chaque fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$. De plus

$$\int_0^{+\infty}|g_n(x)|\ dx = \frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\ dx = \frac{|a_n|\Gamma(n+1)}{n!} = |a_n| < +\infty,$$

ce qui montre que g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$. Ensuite la série de fonctions de terme général g_n converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $g\ :\ x \mapsto f(x)e^{-x}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$ puisque f l'est et de plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}|g_n(x)|\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n| < +\infty.$$

D'après le **TH 4**, la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et de plus on peut intégrer terme à terme pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty}x^n e^{-x}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}\right)e^{-x}\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n.}$$

10. Cas où les TH 3 et TH 4 ne s'appliquent pas.

a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to1}(-1)^n x^n = (-1)^n$. Mais alors la série de terme général $\lim_{x\to1}(-1)^n x^n$ diverge (grossièrement) et d'après le théorème d'interversion des limites, la série de fonctions de terme général $x \mapsto (-1)^n x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

b. $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |(-1)^n x^n|\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 x^n\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$. Les hypothèses du **TH 4** ne sont donc pas toutes vérifiées.

c. $\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\right)\ dx = \int_0^1\frac{dx}{1+x} = \ln(2)$. D'autre part, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-1)^n x^n\ dx = \int_0^1\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^n\ dx = \int_0^1\frac{1-(-1)^{N+1}x^{N+1}}{1+x}\ dx = \ln 2 - (-1)^{N+1}\int_0^1\frac{x^{N+1}}{1+x}\ dx.$$

Or

$$\left|(-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x}\,dx\right| = \int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x}\,dx \leq \int_0^1 x^{N+1}\,dx = \frac{1}{N+2}.$$

Comme $\dfrac{1}{N+2}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, $(-1)^{N+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{1+x}\,dx$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ et finalement $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 (-1)^n x^n\,dx$ tend vers $\ln 2$ quand N tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n x^n\,dx = \ln 2 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\,dx.}$$

11. Théorème de convergence monotone. Chaque fonction S_n est continue par morceaux sur I et intégrable sur I en tant que somme de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I. La suite (S_n) converge simplement sur I vers la fonction f qui est continue par morceaux sur I. De plus, puisque les fonctions f_k sont positives sur I, pour chaque n on a

$$|S_n| = \sum_{k=0}^{n} f_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f_k = f,$$

où f est continue par morceaux et intégrable sur I. Ainsi la suite (S_n) vérifie les hypothèses du théorème de convergence dominée et donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_I f_n(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(x)\,dx = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\,dx$.

12. Application à la physique.
a. Pour $t \in]0,+\infty[$, puisque $e^{-t} < 1$, on a

$$\frac{t^3}{e^t-1} = t^3e^{-t} \times \frac{1}{1-e^{-t}} = t^3e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^3e^{-(n+1)t}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0,+\infty[$, posons $f_n(t) = t^3e^{-(n+1)t}$. Chaque fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Les fonctions f_n sont toutes positives sur $]0,+\infty[$ et la série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{t^3}{e^t-1}$ qui est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ pour les mêmes raisons que les f_n ($\dfrac{t^3}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^2$).
D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^3e^{-(n+1)t}\,dt.$$

En posant $u = (n+1)t$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3e^{-(n+1)t}\,dt = \frac{1}{(n+1)^4}\int_0^{+\infty} u^3e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(4)}{(n+1)^4} = \frac{6}{(n+1)^4}$ et donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6}{(n+1)^4} = 6\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = 6\zeta(4) = 6\times\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}.$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}\,dt = \frac{\pi^4}{15}.}$$

b. Posons $t = \dfrac{hc}{k_8\lambda T}$ et donc $\lambda = \dfrac{hc}{k_8 tT}$ et aussi $d\lambda = -\dfrac{hc}{k_8\lambda^2 T}\,dt$.

$$M = \frac{c}{4}\int_0^{+\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_8\lambda T}\right)-1}\,d\lambda = \int_{+\infty}^0 2\pi hc^2 \times \frac{k_8^5t^5T^5}{h^5c^5}\frac{1}{e^t-1}\times -\frac{hc\,dt}{k_8t^2T}$$
$$= \frac{2\pi k_8^4T^4}{h^3c^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^3}{e^t-1}\times\,dt = \frac{2\pi k_8^4T^4}{h^3c^2}\times\frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5k_8^4}{15h^3c^2}T^4.$$

$$\boxed{M = \sigma T^4 \text{ où } \sigma = \frac{2\pi^3k_8^4}{15h^3c^2}.}$$

13. Généralisation.

a. Soit $x > 1$. Pour $t > 0$ on a

$$\frac{t^{x-1}}{e^t-1} = t^{x-1}e^{-t}\times\frac{1}{1-e^{-t}} = t^{x-1}e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty}t^{x-1}e^{-(n+1)t}.$$

Pour $x > 1$, $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, posons $f_n(t) = t^{x-1}e^{-(n+1)t}$.

• Chaque fonction f_n est continue et positive sur $]0,+\infty[$, intégrable sur $]0,+\infty[$ car équivalente en 0 à t^{x-1} avec $x-1 > 0 > -1$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$.

• La série de fonction de terme général f_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^t-1}$ qui est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ car équivalente en 0 à t^{x-2} avec $x-2 > -1$ et négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$.

D'après le théorème de convergence monotone, pour $x > 1$ on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-(n+1)t}\,dt\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{n+1}\right)^{x-1}e^{-u}\,\frac{du}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^x}\int_0^{+\infty}u^{x-1}e^{-u}\,du = \Gamma(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\\ &= \Gamma(x)\times\zeta(x).\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 1,\ \int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t-1}\,dt = \Gamma(x)\times\zeta(x).}$$

b. Pour $x = 2$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,dt = \Gamma(2)\times\zeta(2) = 1\times\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}\,dt = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Pour $x = 7$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}\,dt = \Gamma(7)\times\zeta(7) = 720\zeta(7)$. On a vu à la question 2.c. que $|\zeta(7) - 1,008349| < 10^{-6}$ et donc

$$|720\zeta(7) - 720\times 1,008349| < 720\times 10^{-6} < 10^{-3}.$$

Une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}\,dt$ à 10^{-3} près est donc $720\times 1,008349 = 726,01128$.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{t^6}{e^t-1}\,dt = 726,01128 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

