SESSION 2006

CONCOURS COMMUN POLYTECHNIQUE

EPREUVE SPECIFIQUE-FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

PARTIE I

I.1. Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Si $n=0$, $P_n(m)=1$ et si $n \geq 1$,

$$P_n(m) = \prod_{k=1}^{n}(m+k) = \prod_{k=m+1}^{m+n} k = \frac{\prod_{k=1}^{m+n} k}{\prod_{k=1}^{m} k} = \frac{(m+n)!}{m!},$$

ce qui reste vrai pour $n=0$.

$$\boxed{\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ P_n(m) = \frac{(m+n)!}{m!}.}$$

I.2. Puisque α n'est pas un entier strictement négatif, $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\alpha) \neq 0$ et donc, pour tout entier naturel n, la fonction $u_n\ :\ x \mapsto \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! P_n(\alpha)}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit x un réel non nul. Pour tout entier naturel n, $u_n(x) \neq 0$ et

$$\begin{aligned}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| &= \frac{|x|^{2n+2}}{|x|^{2n}} \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k)}{\prod_{k=1}^{n+1}(\alpha+k)} \\ &= \left(\frac{|x|}{2}\right)^2 \frac{1}{(n+1)(\alpha+n+1)}.\end{aligned}$$

Donc $\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|$ tend vers $0 < 1$ quand n tend vers $+\infty$. Le critère de d'Alembert permet alors d'affirmer que la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge. Comme ceci est vrai pour tout réel x, on a montré que

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*,\ f_\alpha \text{ est définie sur } \mathbb{R}.}$$

I.3. **I.3.1.** Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$. f_α est la somme d'une série entière de rayon infini et donc f_α est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, les dérivées successives de f_α s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Pour tout réel x, on a

$$\begin{aligned}
xf_\alpha''(x)+(2\alpha+1)f_\alpha'(x)&=x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)(2n-1)x^{2n-2}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)}+(2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)x^{2n-1}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left((2n-1)+(2\alpha+1)\right)\frac{(-1)^nx^{2n-1}}{2^{2n-1}(n-1)!P_n(\alpha)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2(n-1)}(n+\alpha)}{2^{2n-2}(n-1)!P_n(\alpha)}\\
&=-x\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n-1)}}{2^{2(n-1)}(n-1)!P_{n-1}(\alpha)}=-x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)}\\
&=-xf_\alpha(x).
\end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ xf_\alpha''(x)+(2\alpha+1)f_\alpha'(x)+xf_\alpha(x)=0.}$$

I.3.2. Soit y une fonction développable en série entière, paire et solution de (E_α) sur un voisinage de l'origine. Il existe un réel strictement positif R et une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall x\in]-R,R[,\ y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}$. Pour $x\in]-R,R[$, on a alors

$$\begin{aligned}
xy''(x)+(2\alpha+1)y'(x)+xy(x)&=x\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)(2n-1)a_nx^{2n-2}+(2\alpha+1)\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)a_nx^{2n-1}+x\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1+2\alpha+1)(2n)a_nx^{2n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}2^2n(n+\alpha)a_nx^{2n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{2n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}2^2n(n+\alpha)a_nx^{2n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{2n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(2^2n(n+\alpha)a_n+a_{n-1}\right)x^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (et en tenant compte du fait que $y(0)=a_0$),

$$\begin{aligned}
y\text{ solution de }(E_\alpha)\text{ sur }]-R,R[&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 2^2n(n+\alpha)a_n+a_{n-2}=0\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{-1}{2^2n(n+\alpha)}a_{n-1}\\
&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{-1}{2^2n(n+\alpha)}\frac{-1}{2^2(n-1)(n-1+\alpha)}\cdots\frac{-1}{2^21(1+\alpha)}a_0\\
&\Leftrightarrow\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!P_n(\alpha)}y(0).
\end{aligned}$$

D'après la question I.2., le rayon de convergence des séries entières obtenues est infini. Puis, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$y(x)=y(0)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n}}{2^{2n}n!P_n(\alpha)}=y(0)f_\alpha(x).$$

$$\boxed{\text{Les solutions de }(E_\alpha)\text{ développables en série entière sont les fonctions de la forme }\lambda f_\alpha,\ \lambda\in\mathbb{R}.}$$

I.4. **I.4.1** Soit $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. $-\alpha$ n'est pas un entier strictement négatif et donc g_α est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, on a

$$g_\alpha'(x)=-2\alpha x^{-2\alpha-1}f_{-\alpha}(x)+x^{-2\alpha}f_{-\alpha}'(x)$$

puis, d'après la formule de Leibniz,

$$g_\alpha''(x)=(-2\alpha)(-2\alpha-1)x^{-2\alpha-2}f_{-\alpha}(x)+2(-2\alpha)x^{-2\alpha-1}f_{-\alpha}'(x)+x^{-2\alpha}f_{-\alpha}''(x).$$

Mais alors pour tout réel x strictement positif

$$\begin{aligned}
xg''_\alpha(x)+(2\alpha+1)g'_\alpha(x)+xg_\alpha(x) &= x\left((-2\alpha)(-2\alpha-1)x^{-2\alpha-2}f_{-\alpha}(x)+2(-2\alpha)x^{-2\alpha-1}f'_{-\alpha}(x)+x^{-2\alpha}f''_{-\alpha}(x)\right)\\
&\quad+(2\alpha+1)\left(-2\alpha x^{-2\alpha-1}f_{-\alpha}(x)+x^{-2\alpha}f'_{-\alpha}(x)\right)+x.x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x)\\
&= x^{-2\alpha}(xf''_{-\alpha}(x)+(2\alpha+1)f'_{-\alpha}(x)+xf_{-\alpha}(x))-4\alpha x^{-2\alpha}f'_{-\alpha}(x)\\
&= x^{-2\alpha}(xf''_{-\alpha}(x)+(-2\alpha+1)f'_{-\alpha}(x)+xf_{-\alpha}(x))\\
&= 0 \text{ (car } f_{-\alpha} \text{ est solution de } (E_{-\alpha}) \text{ sur }]0,+\infty[).
\end{aligned}$$

$$\boxed{g_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

I.4.2. Montrons que la famille de fonctions (f_α, g_α) est une famille libre de $\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.
Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\lambda f_\alpha+\mu g_\alpha=0$. Ceci s'écrit encore

$$\forall x>0,\ \lambda f_\alpha(x)+\mu x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x)=0\ (1) \text{ ou aussi } \forall x>0,\ \lambda x^{2\alpha}f_\alpha(x)+\mu f_{-\alpha}(x)=0\ (2).$$

On a vu à la question I.3. que f_α et $f_{-\alpha}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. En particulier, quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, $f_\alpha(x)$ tend vers $f_\alpha(0)=\dfrac{(-1)^0}{2^0.0!P_0(\alpha)}=1$ et de même $f_{-\alpha}(x)$ tend vers $f_{-\alpha}(0)=1$.
Si $\alpha<0$, en faisant tendre x vers 0 dans l'égalité (1), on obtient $\lambda=0$ puis, puisque g_α n'est pas la fonction nulle, $\mu=0$.
Si $\alpha>0$, en faisant tendre x vers 0 dans l'égalité (2), on obtient $\mu=0$ puis, puisque f_α n'est pas la fonction nulle, $\lambda=0$.
Dans tous les cas, on a obligatoirement $\lambda=\mu=0$ ce qui montre que

$$\boxed{\text{la famille de fonctions } (f_\alpha,g_\alpha) \text{ est une famille libre de } \mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

Sur $]0,+\infty[$, l'équation (E_α) s'écrit

$$y''(x)+\frac{2\alpha+1}{x}y'(x)+y(x)=0.$$

(E_α) est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 et comme les deux fonctions $x\mapsto\dfrac{2\alpha+1}{x}$ et $x\mapsto 1$ sont continues sur $]0,+\infty[$, on sait que l'ensemble solutions $\mathcal{S}_{\alpha,]0,+\infty[}$ de (E_α) sur $]0,+\infty[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Comme la famille (f_α,g_α) est une famille libre de $\mathcal{S}_{\alpha,]0,+\infty[}$, de cardinal 2, on en déduit que cette famille est une base de $\mathcal{S}_{\alpha,]0,+\infty[}$. Par suite

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } \lambda f_\alpha+\mu g_\alpha,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$$

I.4.3. Soit y une fonction de classe C^2 sur $]-\infty,0$. Pour $x>0$, posons $z(x)=y(-x)$. z est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$, $z'(x)=-y'(-x)$ et $z''(x)=y''(x)$. Mais alors

$$xz''(x)+(2\alpha+1)z'(x)+xz(x)=xy''(-x)-(2\alpha+1)y'(-x)+xy(-x)=-\left((-x)y''(-x)+(2\alpha+1)y'(-x)+(-x)y(-x)\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall t<0,\ ty''(t)+(2\alpha+1)y'(t)+ty(t)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ (-x)y''(-x)+(2\alpha+1)y'(-x)+(-x)y(-x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x>0,\ xz''(x)+(2\alpha+1)z'(x)+xz(x)=0\\
&\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_\alpha) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ sont les fonctions de la forme } x\mapsto\lambda f_\alpha(-x)+\mu g_\alpha(-x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$$

I.5. **I.5.1.** j_α est deux fois dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour $x>0$,

$$\begin{aligned}x^2j_\alpha''(x)+xj_\alpha'(x)+x^2j_\alpha(x)&=x^2(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}f_\alpha(x)+2\alpha x^{\alpha-1}f_\alpha'(x)+x^\alpha f_\alpha''(x))+x(\alpha x^{\alpha-1}f_\alpha(x)+x^\alpha f_\alpha'(x))+x^2.x^\alpha f_\alpha(x)\\&=x^{\alpha+1}(xf_\alpha''(x)+(2\alpha+1)f_\alpha'(x)+xf_\alpha(x))+(\alpha(\alpha-1)+\alpha)x^\alpha f_\alpha(x)\\&=\alpha^2x^\alpha f_\alpha(x)=\alpha^2j_\alpha(x).\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{j_\alpha \text{ est solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

En remplaçant α par $-\alpha$, on obtient le fait que $j_{-\alpha}$ est solution de $(B_{-\alpha})=(B_\alpha)$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{j_\alpha \text{ et } j_{-\alpha} \text{ sont solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

I.5.2. De même qu'à la question I.4.2., l'ensemble des solutions de (B_α) sur $]0,+\infty[$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Montrons que $(j_\alpha,j_{-\alpha})$ est une famille libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\lambda j_\alpha+\mu j_{-\alpha}=0&\Rightarrow \forall x>0,\ \lambda x^\alpha f_\alpha(x)+\mu x^{-\alpha}f_{-\alpha}(x)=0\Rightarrow\forall x>0,\ \lambda f_\alpha(x)+\mu x^{-2\alpha}f_{-\alpha}(x)=0\\&\Rightarrow\lambda f_\alpha+\mu g_\alpha=0\Rightarrow\lambda=\mu=0 \text{ (d'après la question I.4.2).}\end{aligned}$$

Encore une fois, on a trouvé une famille libre de solutions de cardinal 2 et donc une base de l'espace des solutions.

$$\boxed{\text{Les solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } \lambda j_\alpha+\mu j_{-\alpha},\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$$

Soient y une fonction de classe C^2 sur $]-\infty,0[$ puis $z\ :\ x\mapsto y(-x)$. z est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. De plus

$$\begin{aligned}y \text{ solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow\forall t<0,\ t^2y''(t)+ty'(t)+(t^2-\alpha^2)y(t)=0\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ (-x)^2y''(-x)+(-x)y'(-x)+((-x)^2-\alpha^2)y(-x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ x^2y''(-x)-xy'(-x)+(x^2-\alpha^2)y(-x)=0\\&\Leftrightarrow\forall x>0,\ x^2z''(x)+xz'(x)+(x^2-\alpha^2)z(x)=0\\&\Leftrightarrow z \text{ solution de } (B_\alpha) \text{ sur }]0,+\infty[.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{Les solutions de } (B_\alpha) \text{ sur }]-\infty,0[\text{ sont les fonctions de la forme } x\mapsto\lambda j_\alpha(-x)+\mu j_{-\alpha}(-x),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.}$$

PARTIE II

II.1. Soient $\alpha>-\dfrac{1}{2}$ puis $\Phi\ :\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times[0,1[&\to&\mathbb{R}\\(x,t)&\mapsto&(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt)\end{array}$. Nous allons montrer que

- pour tout x réel, la fonction $t\mapsto\Phi(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0,1[$
- Φ est deux fois dérivable par rapport à sa première variable x sur $\mathbb{R}\times[0,1[$ et
  - pour tout t de $[0,1[$, les fonctions $x\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x\mapsto\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
  - pour tout x réel, les fonctions $t\mapsto\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)$ et $x\mapsto\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues par morceaux sur $[0,1[$ et il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 continues par morceaux, positives et intégrables sur $[0,1[$ telles que pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1[$, $\left|\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}(x,t)\right|\leq\varphi_1(t)$ et $\left|\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq\varphi_2(t)$.

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Pout tout réel t de $[0,1[$, on a $1-t^2>0$ et donc la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,1[$. De plus, pour $t \in [0,1[$, $|\Phi(x,t)| \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Or, la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est continue sur $[0,1[$ et quand t tend vers 1 par valeurs inférieures, $(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} = ((1-t)(1+t))^{\alpha-\frac{1}{2}} \sim 2^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-t)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ avec $\alpha - \dfrac{1}{2} > -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$. Ainsi la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ est intégrable sur $[0,1[$ et donc la fonction $t \mapsto \Phi(x,t)$ est intégrable sur $[0,1[$.

• Φ est deux fois dérivable par rapport à sa première variable x sur $\mathbb{R} \times [0,1[$ et pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1[$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt) \text{ et } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt).$$

- Soit $t \in [0,1[$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = -t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) = -t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)$ sont continues par morceaux sur $[0,1[$ et de plus pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1[$,

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \varphi_1(t) \text{ et } \left|\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \leq (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} = \varphi_2(t).$$

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont continues par morceaux et positives sur $[0,1[$, intégrables sur $[0,1[$ d'après ci-dessus.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres (théorème de Leibniz), h_α est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et les dérivées successives de h_α s'obtiennent par dérivation sous le signe somme.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'_\alpha(x) = -\int_0^1 t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)\ dt \text{ et } h''_\alpha(x) = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\ dt.}$$

II.2. II.2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) &= -x\int_0^1 t^2(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\ dt + x\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \cos(xt)\ dt = \int_0^1 (1-t^2)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} x\cos(xt)\ dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x\cos(xt)\ dt. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x\cos(xt)\ dt.}$$

II.2.2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0,1[$. Les deux fonctions et $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}}$ et $t \mapsto \sin(xt)$ sont de classe C^1 sur $[0,a]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned} \int_0^a (1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} x\cos(xt)\ dt &= \left[(1-t^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin(xt)\right]_0^a - \int_0^a (\alpha+\frac{1}{2})(-2t)(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)\ dt \\ &= (1-a^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \sin(xa) + (2\alpha+1)\int_0^a t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)\ dt\ (*). \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)$ est intégrable sur $[0,1[$. Donc, en faisant tendre a tend vers 1 dans l'égalité $(*)$, on obtient

$$xh''_\alpha(x) + xh_\alpha(x) = (2\alpha+1)\int_0^1 t(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \sin(xt)\ dt = -(2\alpha+1)h'_\alpha(x).$$

$$\boxed{h_\alpha \text{ est solution de } (E_\alpha) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout réel t de $[0,1[$, on a

$$(1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt) = \sum_{n=0}^{+\infty} ({}_1)^n (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Pour $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = ({}_1)^n (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$.

- Chaque fonction f_n est continue sur $[0,1[$. De plus, quand t tend vers 1,

$$|f_n(t)| = (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = O((1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}),$$

ce qui montre que chaque fonction f_n est intégrable sur $[0,1[$.

- La série de fonction de terme général f_n converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos(xt)$ qui est continue sur $[0,1[$.
- Vérifions enfin que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 |f_k(t)|\,dt &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2n)!} x^{2k}\,dt = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2n)!} x^{2k}\right)\,dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2k}}{(2n)!} x^{2k}\right)\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(xt)\,dt.\end{aligned}$$

Mais la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(xt)$ est intégrable sur $[0,1[$ car continue sur $[0,1[$ et dominée en 1 par la fonction $t \mapsto (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ qui est intégrable sur $[0,1[$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(xt)\,dt < +\infty$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 |f_k(t)|\,dt \leq \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}\,\mathrm{ch}(xt)\,dt < +\infty.$$

Puisque la suite des sommes partielles de la série numérique de terme général positif $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ est majorée, la série de terme général $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.

En résumé,

- Chaque fonction f_n est continue et intégrable sur $[0,1[$,
- La série de fonctions de terme général f_n converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction continue sur $[0,1[$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$.

D'après un théorème d'intégration terme à terme, on peut alors écrire

$$h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 (-1)^n (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\,dt\right) x^{2n}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n I_n(\alpha) x^{2n}}{(2n)!} \text{ où } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = \int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} t^{2n}\,dt.}$$

II.4. Puisque h_α est développable en série entière, la question I.3.2. permet d'écrire que

$$\boxed{h_\alpha = h_\alpha(0) f_\alpha = I_0(\alpha) f_\alpha.}$$

II.5. Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que pour tout entier naturel n,

$$\frac{(-1)^n I_n(\alpha)}{(2n)!} = I_0(\alpha) \frac{(-1)^n}{2^{2n} n! P_n(\alpha)},$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! P_n(\alpha)} I_0(\alpha).}$$

PARTIE III

III.1. *Calcul du laplacien en polaires.* Rappelons tout d'abord que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ puis que la matrice jacobienne de l'application $(r, \theta) \mapsto (x, y)$ au point (r, θ) est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La formule de dérivation des fonctions composées fournit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(F(r\cos\theta, r\sin\theta))(r,\theta) \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \sin\theta\frac{\partial F}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Puisque la fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, le théorème de SCHWARZ permet d'affirmer que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$. En dérivant une deuxième fois par rapport à r, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial y} \\ &= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

De même, dérivons deux fois par rapport à θ.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial y}\right) \\ &= -r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} - r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) - r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} + r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\ &= -r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right) + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ &= -r\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} \\ &\quad - \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial F}{\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \Delta F\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \Delta F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{F}}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \theta^2}(r\theta).}$$

III.2. D'après III.1., on a

$$\begin{aligned}\Delta F+\omega^2F &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}(f(r)g(\theta))+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(f(r)g(\theta))+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(f(r)g(\theta))+\omega^2(f(r)g(\theta))\\ &= \frac{1}{r^2}\left((r^2f''(r)+rf'(r)+r^2\omega^2f(r))g(\theta)+f(r)g''(\theta)\right)\end{aligned}$$

L'égalité $\Delta F+\omega^2F=0$ fournit alors

$$\forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \left(r^2f''(r)+rf'(r)+r^2\omega^2f(r)\right)g(\theta)+f(r)g''(\theta)=0\quad(*).$$

Soit de nouveau r_0 un réel tel que $f(r_0)\neq 0$ puis $\lambda=\dfrac{r_0^2f''(r_0)+r_0f'(r_0)+r_0^2\omega^2f(r_0)}{f(r_0)}$. L'égalité $(*)$ fournit alors

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\ g''(\theta)+\lambda g(\theta)=0.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit alors

$$\forall(r,\theta)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \left(r^2f''(r)+rf'(r)+(r^2\omega^2-\lambda)f(r)\right)g(\theta)=0.$$

Cette dernière égalité est en particulier vérifiée pour un réel θ_0 tel que $g(\theta_0)\neq 0$ (θ_0 existe puisque F n'est pas identiquement nulle). Après simplification par $g(\theta_0)$, on obtient

$$\forall r\in]0,+\infty[,\ r^2f''(r)+rf'(r)+(r^2\omega^2-\lambda)f(r)=0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe un réel }\lambda\text{ tel que}\\ \text{(i) }\forall r\in]0,+\infty[,\ r^2f''(r)+rf'(r)+(r^2\omega^2-\lambda)f(r)=0,\\ \text{et}\\ \text{(ii) }\forall\theta\in\mathbb{R},\ g''(\theta)+\lambda g(\theta)=0.\end{array}}$$

III.2.3. • Si $\lambda<0$, les solutions de (ii) sont les fonctions de la forme $g\ :\ \theta\mapsto ae^{\sqrt{-\lambda}\theta}+be^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Une telle solution est périodique si et seulement si $a=b=0$ et donc $g=0$ ce qui est exclu. Donc $\lambda\geq 0$.

• Si $\lambda=0$, alors $\lambda=0^2$.

• Supposons maintenant $\lambda>0$. Les solutions de (ii) sont les fonctions de la forme $g\ :\ \theta\mapsto a\cos(\sqrt{\lambda}\theta)+b\sin(\sqrt{\lambda}\theta)$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Une telle solution peut encore s'écrire sous la forme $\theta\mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}\theta+\varphi)$ où A et φ sont deux réels. Si l'équation (ii) admet une solution non nulle et 2π-périodique alors la fonction $\theta\mapsto\cos(\sqrt{\lambda}\theta+\varphi)$ est 2π-périodique ce qui impose à $2\pi\sqrt{\lambda}$ d'être un multiple entier de 2π et donc à $\sqrt{\lambda}$ d'être un entier. Ainsi il existe un entier naturel non nul p tel que $\sqrt{\lambda}=p$ ou encore $\lambda=p^2$.

$$\boxed{\exists p\in\mathbb{N}/\ \lambda=p^2.}$$

III.2.4. Si $p=0$, g est une solution non nulle et 2π-périodique de l'équation $y''=0$ et donc g est une constante non nulle.

Si $p\in\mathbb{N}^*$, g est une solution non nulle et 2π-périodique de l'équation $y''+p^2y=0$ et donc g est une fonction de la forme $\theta\mapsto a\cos(p\theta)+b\sin(p\theta)$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

III.3. **III.3.1.** Supposons que $p=\omega=0$.

$$\begin{aligned}f\text{ solution de (i)}&\Leftrightarrow\forall r>0,\ rf''(r)+f'(r)=0\Leftrightarrow\forall r>0,\ (rf')'(r)=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall r>0,\ rf'(r)=\lambda\\ &\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall r>0,\ f'(r)=\frac{\lambda}{r}\\ &\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall r>0,\ f(r)=\lambda\ln(r)+\mu.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si }p=\omega=0,\ f\text{ est de la forme }r\mapsto\lambda\ln(r)+\mu,\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}.}$$

III.3.2. Supposons que $p \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = 0$. (i) s'écrit : $\forall r > 0,\ r^2 f''(r) + rf'(r) - p^2 f(r) = 0$. Cherchons des fonctions solutions sous la forme $f(r) = r^\alpha$ où α est un réel. Pour $r > 0$, on a

$$r^2 f''(r) + rf'(r) - p^2 f(r) = r^2.\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} + r\alpha r^{\alpha-1} - p^2 r^\alpha = (\alpha^2 - p^2)r^\alpha,$$

et f est solution si et seulement si $\alpha = p$ ou $\alpha = -p$. Ainsi, les deux fonctions $u\ :\ r \mapsto r^p$ et $v\ :\ r \mapsto r^{-p}$ sont deux solutions non nulles de l'équation (i).

Montrons que ces deux fonctions sont linéairement indépendantes. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall r > 0,\ \lambda r^p + \mu r^{-p} = 0$ ou encore $\forall r > 0,\ \lambda r^{2p} + \mu = 0$. Mais alors, le polynôme $\lambda X^{2p} + \mu$ a une infinité de racines et donc $\lambda = \mu = 0$. La famille de fonctions (u, v) constitue donc une famille libre de solutions de l'équation (i).

On sait que l'ensemble des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (i) constituent un $\mathbb{R}$-espace de dimension 2. La famille (u, v) est donc une base de cet espace et les solutions de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$ sont les fonctions de la forme $r \mapsto \lambda r^p + \dfrac{\mu}{r^p}$.

$$\boxed{\text{Si } \omega = 0 \text{ et } p \in \mathbb{N}^*, \text{ f est de la forme } r \mapsto \lambda r^p + \frac{\mu}{r^p},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.}$$

III.4. Soit f une solution de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$. Pour $r > 0$,

$$\begin{aligned} r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) + (r^2 - p^2)f_1(r) &= \frac{r^2}{\omega^2} f''\left(\frac{r}{\omega}\right) + \frac{r}{\omega} f'\left(\frac{r}{\omega}\right) + (r^2 - p^2) f\left(\frac{r}{\omega}\right) \\ &= \left(\frac{r}{\omega}\right)^2 f''\left(\frac{r}{\omega}\right) + \left(\frac{r}{\omega}\right) f'\left(\frac{r}{\omega}\right) + \left(\left(\frac{r}{\omega}\right)^2 \omega^2 - p^2\right) f\left(\frac{r}{\omega}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car f est solution de l'équation (i) sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{f_1 \text{ est solution de l'équation } (B_p) \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

