SESSION 2002

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

PCM2007

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont interdites

****

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

La partie IV peut être traitée indépendamment des autres.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction polynôme de la variable réelle x définie par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$$

I.1 Donner une expression explicite des fonctions polynômes P_0, P_1, P_2, P_3.

I.2 Exprimer $P_n(-x)$ en fonction de $P_n(x)$.

I.3 Calculer $P_n(0)$ et $P'_n(0)$.

I.4 En effectuant de deux façons différentes le calcul de $\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\left[\left(x^2-1\right)^{n+1}\right]$, montrer que l'on a :

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

I.5 Soit k un nombre entier compris au sens large entre 0 et $n-1$. Préciser l'ordre de multiplicité de $+1$ et -1 en tant que racines de la dérivée d'ordre k de $(x^2-1)^n$.

En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de $(x^2-1)^n$, montrer que P_n admet n racines réelles distinctes, toutes comprises strictement entre -1 et +1 .

PARTIE II

Soit f la fonction de deux variables réelles x , y définie par :

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-2xy+x^2}}$$

II.1 Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}_f$ des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ en lesquels $f(x,y)$ est définie.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que $2|x|.|y|+|x|^2<1$.

On admettra que l'on a sur $\mathcal{E}$ un développement en série de f de la forme :

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{+\infty}A_n(y)x^n \qquad (E)$$

où les fonctions A_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que les dérivées partielles de f à tous les ordres, par rapport à l'ensemble des deux variables x et y , peuvent se calculer en dérivant terme à terme le deuxième membre de l'égalité (E) .

II.2 Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{E}$.

II.3 Calculer $A_n(0)$ et $A'_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

II.4

II.4.1 Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(x-y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

En déduire que l'on a $yA'_0(y)=0$, et pour tout $n\geq 1$, $yA'_n(y)-A'_{n-1}(y)=nA_n(y)$ (1).

II.4.2 Calculer $(1-2xy+x^2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(x-y)f(x,y)$.

En déduire que l'on a $A_1(y)-yA_0(y)=0$, et pour tout $n\geq 2$:

$$nA_n(y)-(2n-1)yA_{n-1}(y)+(n-1)A_{n-2}(y)=0 \qquad (2)$$

II.4.3 En dérivant les relations obtenues à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n\geq 1$, la relation $A'_n(y)\ -yA'_{n-1}(y)=nA_{n-1}(y)$ (3).

II.4.4 Déduire de ce qui précède que l'on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(1-y^2)A''_n(y)-2yA'_n(y)+n(n+1)A_n(y)=0\ .$$

Exprimer $A_n(y)$ en fonction de $P_n(y)$ pour tout $y\in\ ]-1,+1[$.

PARTIE III

On considère les fonctions F , C et S des deux variables réelles x et θ définies pour $|x|<1$ et θ quelconque par :

$$F(x,\theta)=\frac{1}{1-2x\cos\theta+x^2}\ ,\quad C(x,\theta)=\frac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\ ,\quad S(x,\theta)=\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\ .$$

III.1 Pour x fixé tel que $|x|<1$, déterminer les développements en séries de Fourier $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)\cos n\theta$ de $C(x,\theta)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x)\sin n\theta$ de $S(x,\theta)$ considérées comme fonctions de la variable θ. On montrera que $C(x,\theta)+iS(x,\theta)=\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}}$.

A-t-on les égalités $C(x,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x)\cos n\theta$ et $S(x,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x)\sin n\theta$ pour tout couple (x,θ) appartenant à $]-1,+1[\times\mathbb{R}$?

III.2 Déduire de la question précédente le développement en série de Fourier $F(x,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\cos n\theta$ de $F(x,\theta)$ considérée comme fonction de la variable θ , ainsi que le développement en série entière $F(x,\theta)=\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(\theta)x^n$ de $F(x,\theta)$ considérée comme fonction de la variable x.

III.3 Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{k=0}^{n} P_k(\cos\theta)P_{n-k}(\cos\theta)=\dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, cette dernière fonction de θ étant supposée prolongée par continuité lorsque θ est multiple entier de π.

PARTIE IV

Soit λ un nombre réel non entier relatif. On considère l'équation différentielle linéaire en la fonction inconnue z de la variable réelle x, à valeurs réelles :

$$(L_\lambda) \qquad (1-x^2)z''(x)-2xz'(x)+\lambda(\lambda+1)z(x)=0 \ .$$

On se propose de déterminer les solutions de (L_λ) développables en série entière au voisinage de 0.

IV.1 Soit $z(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul. Déterminer la relation qui doit lier α_{n+2} et α_n pour que z soit solution de (L_λ).

IV.2 En déduire l'expression de α_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.3 Quel est le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues ?

Fin de l'énoncé