CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Introduction

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle **algèbre** tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$ qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall c \in \mathbb{A},\ \ a(b+c) = ab + ac,\ (b+c)a = ba + ca$$

ainsi que :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall b \in \mathbb{A}, \forall \lambda \in \mathbb{R},\ a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab)$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté $\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}_{\mathbb{A}}$ et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbb{A},\ a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite **commutative**. La **dimension** d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une **sous-algèbre** de $\mathbb{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{A}$ qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que $\mathbb{A}$. Pour que $\mathbb{B}$ soit une sous-algèbre de $\mathbb{A}$, il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{A}$, qu'il contienne $\mathbf{1}$ et que :

$$\forall b \in \mathbb{B},\ \forall b' \in \mathbb{B},\ bb' \in \mathbb{B}$$

On appelle **morphisme d'algèbre** entre deux algèbres $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, toute application linéaire f de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ qui vérifie en plus :

$$\forall a \in \mathbb{A}, \forall a' \in \mathbb{A},\ \ f(aa') = f(a)f(a') \text{ et } f(\mathbf{1}_{\mathbb{A}}) = \mathbf{1}_{\mathbb{B}}$$

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé **isomorphisme** d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n. La **trace** d'une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A. Une matrice **scalaire** est une matrice de la forme λI_n, où λ est un réel. Une matrice **diagonale** est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

I. Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que :
$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$$
2. Soit A une matrice non scalaire ; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble
$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bA\}$$
Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice B telle que
$$B^2 = -I_2 \text{ si, et seulement si, } (\operatorname{tr} A)^2 < 4\det A$$
4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre $\mathbb{A}$ et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
5. On suppose que A est non scalaire et vérifie :
$$(\operatorname{tr} A)^2 = 4\det A$$
Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.
6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans I.2. Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.
7. On suppose que A est telle que :
$$(\operatorname{tr} A)^2 > 4\det A$$
Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?

II. Quelques résultats généraux

Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie n.

1. Soit a un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application ϕ_a définie par :

$$\begin{array}{llll} \phi_a & : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

   est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.

2. On note $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{D}$.
   $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme ϕ_a dans la base $\mathscr{B}$. Démontrer que l'application :

$$\begin{array}{llll} \Psi & : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_a) \end{array}$$

   est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de la base $\mathscr{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi_z)$.

4. Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.

   (a) On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ. Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A.

   (b) En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.

   (c) On suppose que $\mathbb{A}$ est **intègre**, c'est-à-dire que :

$$\forall A \in \mathbb{A},\ \forall B \in \mathbb{A},\ AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

   Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme **de l'espace vectoriel** $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A^2 = -I_n, \qquad B^2 = -I_n, \qquad AB + BA = 0 \qquad (*)$$

1. Démontrer que n ne peut pas être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

4. En déduire :
   (a) que les quatre matrices I_n, A, B et AB sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$;
   (b) que $\mathbb{H}$ est un corps.
5. On suppose **dans toute la suite du problème** que $n = 4$ et, en notant J la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices A et B de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

   On pose également $C = AB$.
   (a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition $(*)$. On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base (I_4, A, B, C) de $\mathbb{H}$ sera notée $\mathscr{B}$.
   (b) Soit M une matrice non nulle de $\mathbb{H}$, vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$; quel lien y a t-il entre M^{-1} et ${}^tM$?

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. On appelle **quaternion pur** un élément M de $\mathbb{H}$ tel que $M = -{}^tM$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois et de base $\mathscr{C} = (A, B, C)$. On le note $\mathbb{L}$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathbb{H}$?
2. On munit $\mathbb{L}$ de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base $\mathscr{C}$ soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments M et N de $\mathbb{L}$ est noté $(M|N)$, la norme de M s'écrit $||M||$. Vérifier que :

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$$

3. Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.
4. Soit ϕ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de ϕ à $\mathbb{L}$ est un endomorphisme orthogonal.
5. Soient M et N deux quaternions purs. On veut démontrer que si M et N ont même norme, alors il existe $P \in \mathbb{H}$, non nulle, telle que :

$$M = P^{-1}NP$$

   (a) Commencer par examiner le cas où M et N sont colinéaires.

(b) On suppose maintenant que M et N ne sont pas colinéaires. Vérifier que si M et N ont même norme :

$$M(MN) - (MN)N = ||M||^2(M - N)$$

et en déduire une matrice P non nulle telle que $MP = PN$.

6. Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec α réel et $Q \in \mathbb{L}$, Q est orthogonal à M et à N.
7. En déduire que tout isomorphisme d'algèbre ϕ de $\mathbb{H}$ dans lui-même est défini par :

$$\phi(M) = P^{-1}MP$$

où P est un élément non nul de $\mathbb{H}$. On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de A et de B, et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent A invariante.

Fin de l'énoncé.