SESSION 2002 | CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES | MPM104

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 1

Durée : 4 heures

---

*Les calculatrices **sont autorisées**.*

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Autour des produits infinis

Si n_0 est un entier naturel et si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de réels non nuls, on lui associe la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ définie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ par : $P_n = \prod_{p=n_0}^{n} u_p = u_{n_0}.u_{n_0+1}.....u_n$.

On dit que le produit infini $\prod_{n\geq n_0} u_n$, de terme général u_n, converge si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un nombre fini non nul. On notera alors $\prod_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ sa limite.

Si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ n'admet pas de limite finie ou si elle converge vers 0 on dit que le produit $\prod_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

I. Généralités et exemples

1. En considérant le quotient $\frac{P_{n+1}}{P_n}$, montrer que, pour que le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge, il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 1.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels non nuls qui converge vers 1.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 0$.

b. Montrer que les produits infinis $\prod_{n\geq 0} u_n$ et $\prod_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature.

3. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels strictement positifs.

a. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \ln u_n$ converge.

b. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0} (1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

c. Si, de plus, pour tout entier naturel n on a $0 < u_n < 1$, montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 0} (1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

4. Déterminer la nature des produits infinis suivants :

a. $\prod_{n\geq 1} (1-\frac{1}{4n^2})$.

b. $\prod_{n\geq 1} (1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$ pour x réel, $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

c. $\prod_{n\geq 1} (1+\frac{x}{n})e^{\frac{-x}{n}}$ pour x réel, $x \in \left]0, +\infty\right[$.

5. *Application* : Un peu d'histoire…

a. Retrouver, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

b. Si p est entier naturel $p \geq 2$, que vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k}$?

c. On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant : $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$….

Voici un extrait d'un texte écrit par Leonhard Euler (mathématicien suisse) en 1737 (« Introduction à l'analyse infinitésimale ») :

« *…Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs infinis ou finis.*

Par exemple, on aura $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\text{etc.}$ *série où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux ; c'est-à-dire toutes les puissances de deux.*

On aura ensuite $\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\text{etc.}$ *On ne retrouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 et 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 et 3. Donc, si au lieu de* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., *on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, et qu'on suppose* $P=\dfrac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\text{etc.}}$, *on aura* $P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\text{etc.}$, *série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or, comme tous les nombres sont ou des nombres premiers ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs... »*

Utiliser librement ce texte pour montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{p_n}$ diverge.

II. Développement eulérien du sinus et formule de Wallis

Pour α réel et non entier, on définit l'application $f_\alpha : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de période 2π par :

$$\forall t\in[-\pi,\pi],\quad f_\alpha(t)=\cos(\alpha t).$$

Pour t réel tel que $\sin t\neq 0$, on pose $\text{cotan}\, t=\dfrac{\cos t}{\sin t}$.

6. Développer f_α en série de Fourier et en déduire que $\text{cotan}(\alpha\pi)=\dfrac{1}{\alpha\pi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2\alpha}{\pi(\alpha^2-n^2)}$.

7. Soit $x\in\,]0,\pi[$, on définit la fonction g sur $[0,x]$ par :

$$g(t)=\text{cotan}\, t-\frac{1}{t}\ \text{si}\ t\in\,]0,x]\quad\text{et}\quad g(0)=0.$$

a. Montrer que la fonction g est continue sur $[0,x]$ et calculer $\int_0^x g(t)\,dt$.

b. Montrer que pour tout $t\in[0,x]$, $g(t)=2t\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{t^2-n^2\pi^2}$.

c. Montrer que $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})=\dfrac{\sin x}{x}$ et en déduire le développement eulérien de $\sin x$:

pour tout $x\in\,]-\pi,\pi[$: $\sin x=x\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2})$.

8. *Application* : Déterminer $\prod_{n=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{4n^2})$ (Formule de Wallis).

III. Formule de Weierstrass et constante d'Euler

9. Soit $x\in\,]0,+\infty[$.

a. Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-t}.t^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose, pour $x\in\,]0,+\infty[$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}.t^{x-1}\,dt$ (Fonction Gamma d'Euler).

b. Calculer $\Gamma(1)$.

c. Montrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

10. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} \forall t\in\,]0,n]\ , & f_n(t)=\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \\ \forall t\in\,]n,+\infty[\ , & f_n(t)=0 \end{cases}.$$

a. Montrer que pour tout $t\in\,]0,+\infty[$: $0\leq f_n(t)\leq e^{-t}$.

b. En déduire que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[$: $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

11. On pose pour n entier naturel et pour $x\in\,]0,+\infty[$: $I_n(x)=\int_0^1(1-u)^n.u^{x-1}\,\mathrm{d}u$.

a. Déterminer, pour $n\geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x\in\,]0,+\infty[$, $I_n(x)$.

c. Démontrer la formule de Gauss :

pour tout $x\in\,]0,+\infty[$: $\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n!\,n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

12. *Application* :

a. Montrer que, pour tout $x\in\,]0,1[$: $\dfrac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}=x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{x^2}{n^2}\right)$.

b. Déterminer alors, pour tout $x\in\,]0,1[$, une expression simple de $\Gamma(x)\Gamma(1-x)$. (Formule des compléments).

c. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

13. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

a. Expliquer simplement pourquoi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $v_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge. Sa limite notée γ est la constante d'Euler.

14. Démontrer la formule de Weierstrass :

pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$: $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(x)} = x\, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{\frac{-x}{n}}$.

(*Cette formule permet, par un produit infini complexe, de définir la fonction* Γ *pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ *par* : $\displaystyle\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\frac{-z}{n}}$).

15. *Application* :

a. Montrer que, pour tout $x \in \left]0, 1\right]$: $\displaystyle\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)}$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} . \ln t\,\mathrm{d}t$.

Fin de l'énoncé.