

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel positif x , on a

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = -40 \left(-\frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On a déjà $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 10e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -40 \left(-\frac{1}{2}x\right) e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel positif x , on a

$$f'(x) = 20 \times e^{-\frac{1}{2}x} + (20x + 10) \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = (20 - (10x + 5))e^{-\frac{1}{2}x} = (-10x + 15)e^{-\frac{1}{2}x} = 10\left(-x + \frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Puisque $10e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x + \frac{3}{2}$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $]\frac{3}{2}, +\infty[$ et s'annule en $\frac{3}{2}$.

On en déduit le tableau de variations de f .

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	10	$40e^{-3/4}$	0

3) Déjà $f(0) = 10$. Ensuite, f est strictement croissante sur l'intervalle $]\frac{3}{2}, +\infty[$. Ainsi, si $x \in]\frac{3}{2}, +\infty[$, $f(x) > f(0)$ ou encore $f(x) > 10$. L'équation $f(x) = 10$ n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]\frac{3}{2}, +\infty[$.

Sur l'intervalle $]0, \frac{3}{2}[$, f est continue et strictement décroissante. Puisque $f(\frac{3}{2}) = 40e^{-3/4}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $]0, 40e^{-3/4}[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]0, \frac{3}{2}[$. Comme $40e^{-3/4} = 18,8\dots$, on a $0 < 10 < 40e^{-3/4}$ et donc l'équation $f(x) = 10$ admet une solution et une seule dans $]0, \frac{3}{2}[$.

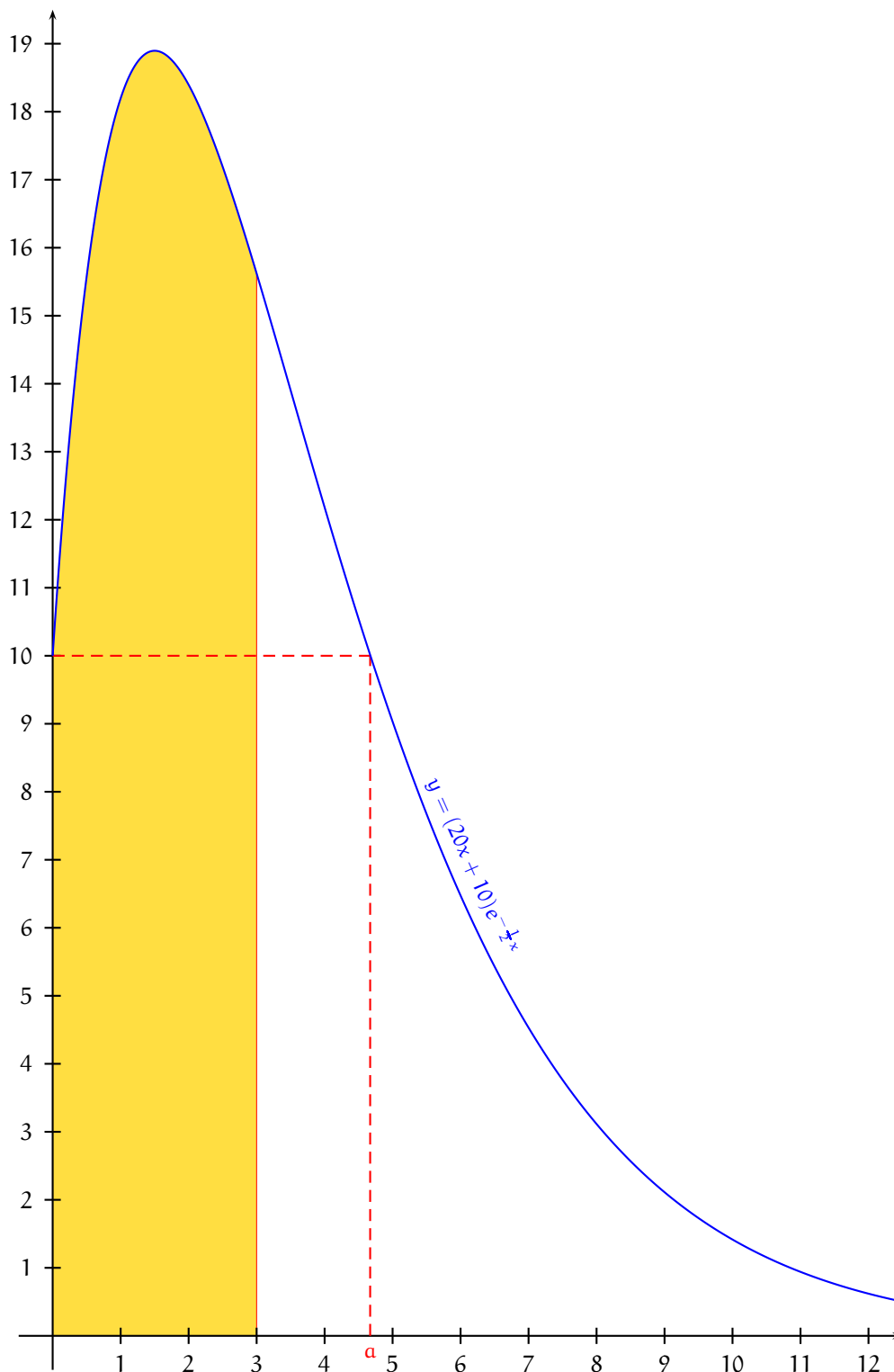
En résumé,

L'équation $f(x) = 10$ possède une et une seule solution strictement positive notée α dans $]0, +\infty[$.

La machine donne $f(4,673) = 10,0009\dots$ et $f(4,674) = 9,997\dots$. Par suite, $f(4,673) > f(a) > f(4,674)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$, on a $4,673 < a < 4,674$. Ainsi,

$$a = 4,673 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}$$

4)



5) Calculons l'intégrale proposée à l'aide d'une intégration par parties.

Pour x élément de l'intervalle $[0, 3]$, posons $u(x) = (20x + 10)$ et $v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 3]$ et pour tout réel x de $[0, 3]$, $u'(x) = 20$ et $v'(x) = (-2)(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$.

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= \left[(20x + 10)(-2e^{-\frac{1}{2}x}) \right]_0^3 - \int_0^3 20 \times (-2e^{-\frac{1}{2}x}) dx = -140e^{-1,5} + 20 + 40 \int_0^3 e^{-\frac{1}{2}x} dx \\ &= 20 - 140e^{-1,5} + 40 \left[-2e^{-\frac{1}{2}x} \right]_0^3 = 20 - 140e^{-1,5} + 40(-2e^{-1,5} + 2) = 100 - 220e^{-1,5}.\end{aligned}$$

$$\int_0^3 f(x) dx = 100 - 220e^{-1,5}.$$

Partie B

1) D'après la question A.2., f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel t de $[0, +\infty[$, on a

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = (-10t + 15)e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{2}(20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t} = (-10t + 15 + 10t + 5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

f est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

2) a) Soit g une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ telle que $g(0) = 10$. $g - f$ est dérivable sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et pour tout réel t de $[0, +\infty[$,

$$(g - f)'(t) + \frac{1}{2}(g - f)(t) = \left(g'(t) + \frac{1}{2}g(t) \right) - \left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t) \right) = 20e^{-\frac{1}{2}t} - 20e^{-\frac{1}{2}t} = 0.$$

Donc, la fonction $g - f$ est solution de l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

b) On sait que pour α réel donné, les solutions de l'équation différentielle $y' = \alpha y$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{\alpha t}$ où C est un réel. Donc les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme $t \mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t}$ où C est un réel.

c) Il existe donc un réel C tel que pour tout réel positif t , $g(t) - f(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t}$. Quand $t = 0$, on obtient $Ce^0 = g(0) - f(0)$ et donc $C = 10 - 10 = 0$. Ainsi, pour tout réel positif t , on a $g(t) - f(t) = 0$ et donc $g = f$.

f est l'unique solution de l'équation différentielle (E) sur $[0, +\infty[$ qui prend la valeur 10 en 0.

3) Soit t_0 un réel positif. La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de t heures si et seulement si $t_0 = a$. Or $4,673 < a < 4,674$ et de plus $4,673h = 4h 40,38min$ et $4,674h = 4h 40,34min$. Donc $t_0 = 4h 40min$ arrondi à la minute.

La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de 4h 40min (arrondi à la minute).

4) D'après la question A.5., $\theta = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(t) dt = \frac{100 - 220e^{-1,5}}{3} = 16,9\dots$

$$\theta = \frac{100 - 220e^{-1,5}}{3} \text{ degrés Celsius} = 17^\circ \text{ (arrondi au degré).}$$

EXERCICE 2

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

- 1) C
 2) D
 3) B
 4) A
 5) D

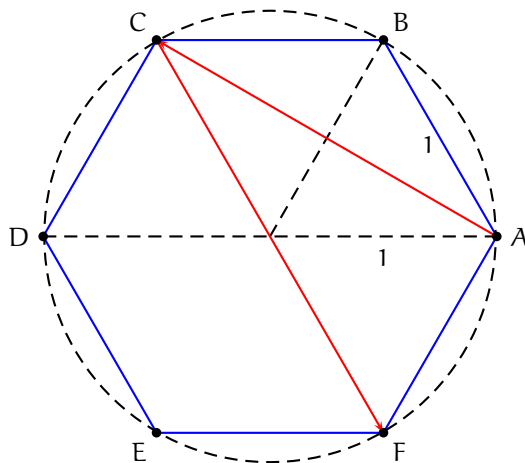
Explications.

1) Puisque $\frac{14\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2 \times 2\pi$,

$$z^{14} = (\sqrt{2})^{14} e^{14i\pi/3} = 2^7 e^{2i\pi/3} = 128 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -64 + 64i\sqrt{3}.$$

2) $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$ et $|z - 3| = |3 - 4i| \Leftrightarrow SM = 5$. (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3)



[CF] est un diamètre du cercle circonscrit à ABCDEF. Donc $\vec{AC} \cdot \vec{AF} = 0$ puis

$$\vec{AC} \cdot \vec{CF} = \vec{AC} \cdot (\vec{CA} + \vec{AF}) = \vec{AC} \cdot \vec{CA} + \vec{AC} \cdot \vec{AF} = -AC^2.$$

[AD] est un autre diamètre du cercle circonscrit à ABCDEF. Donc le triangle ACD est rectangle en C et $AC^2 = AD^2 - DC^2 = 2^2 - 1^2 = 3$. Finalement $\vec{AC} \cdot \vec{CF} = -AC^2 = -3$.

4) Pour tout réel x strictement négatif, on a

$$g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x - 3} = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{2x}{x^2}}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{-x}{x} \times \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{3}{x}} = -\frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x}}}{1 - \frac{3}{x}},$$

et donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$.

5) La fonction $g : t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} . Donc la fonction $f : x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est définie et dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = g(x) = e^{-x^2}$. Puis, pour tout réel x , $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.

EXERCICE 3

1) a) Un vecteur normal au plan \mathcal{R} est le vecteur $\vec{n}'(1, 2, 0)$. Ensuite,

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = (-2) \times 1 + 1 \times 2 + 5 \times 0 = 0.$$

Ainsi, les vecteurs \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux ou encore

les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires.

b) \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires et en particulier sécants en une droite Δ . On sait que tout vecteur non nul et orthogonal à \vec{n} et \vec{n}' est un vecteur directeur de Δ . Or

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \times (-2) + (-1) \times 1 + 1 \times 5 = -5 + 5 = 0 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{n}' = 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times 0 = 2 - 2 = 0.$$

Donc, \vec{u} est un vecteur directeur de Δ .

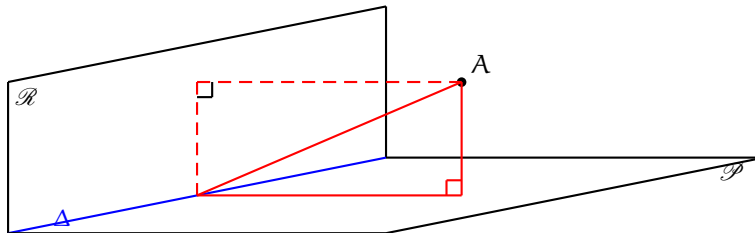
D'autre part, une équation cartésienne de \mathcal{P} est $-2(x-1) + (y+2) + 5(z-1) = 0$ ou encore $-2x + y + 5z - 1 = 0$. Comme $-2 \times (-1) + 4 + 5 \times (-1) - 1 = 6 - 6 = 0$, le point C appartient au plan \mathcal{P} . De même, $(-1) + 2 \times 4 - 7 = 8 - 8 = 0$ et le point C appartient au plan \mathcal{R} . Finalement, le point C appartient au plan \mathcal{P} et au plan \mathcal{R} et donc à la droite Δ .

Δ est la droite passant par C(-1;4;-1) et de vecteur directeur $\vec{u}(2;-1;1)$.

$$c) d(A, \mathcal{P}) = \frac{|-2 \times 5 + (-2) + 5 \times (-1) - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{30}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \text{ et } d(A, \mathcal{R}) = \frac{|(5) + 2(-2) - 7|}{\sqrt{(1)^2 + (2)^2 + 0^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \text{ et } d(A, \mathcal{R}) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

d)



Puisque les plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont perpendiculaires, le théorème de PYTHAGORE permet d'affirmer que,

$$d(A, \Delta)^2 = d(A, \mathcal{P})^2 + d(A, \mathcal{R})^2 = \frac{9 \times 6}{5} + \frac{36}{5} = \frac{90}{5} = 18,$$

et donc

$$d(A, \Delta) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

2) a) Soit t un nombre réel.

$$\varphi(t) = AM_t = \sqrt{(1+2t-5)^2 + (3-t+2)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{(2t-4)^2 + (5-t)^2 + (t+1)^2} = \sqrt{6t^2 - 24t + 42}.$$

$$\text{Pour tout réel } t, \varphi(t) = \sqrt{6t^2 - 24t + 42}.$$

b) Pour tout réel t , $6t^2 - 24t + 42 = 6(t-2)^2 + 18$ et donc $6t^2 - 24t + 42 > 0$. Ainsi, la fonction φ est de la forme \sqrt{u} où u est une fonction dérivable sur \mathbb{R} et strictement positive. On sait alors que φ est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel t ,

$$\varphi'(t) = \frac{(6t^2 - 24t + 42)'}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{12t - 24}{2\sqrt{6t^2 - 24t + 42}} = \frac{6(t-2)}{\sqrt{6t^2 - 24t + 42}}.$$

Pour tout réel t , $\varphi'(t)$ est du signe de $t - 2$. Donc, la fonction φ' est strictement négative sur $] - \infty, 2[$ et strictement positive sur $]2, +\infty[$.

La fonction φ est ainsi strictement décroissante sur $] - \infty, 2[$ et strictement croissante sur $]2, +\infty[$. On en déduit que φ admet un minimum, atteint en 2 avec

$$\varphi(2) = \sqrt{6 \times 2^2 - 24 \times 2 + 42} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

$$\varphi \text{ admet un minimum égal à } 3\sqrt{2}.$$

c) La droite dont un système d'équations paramétriques est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$$

est la droite passant par le point $M_{-1}(-1, 4, -1)$ c'est-à-dire le point C et de vecteur directeur $\vec{u}(2, -1, 1)$: cette droite est la droite Δ .

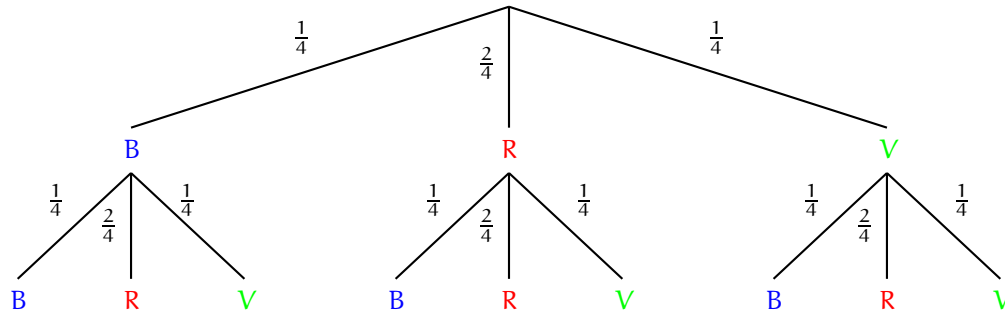
Ainsi, quand t décrit \mathbb{R} , le point M_t décrit la droite Δ . Le minimum de la fonction φ est donc la valeur minimum de la distance de A à un point de la droite Δ . On sait que ce minimum est la distance du point A à la droite Δ .

$$\text{Le minimum de la fonction } \varphi \text{ est la distance du point A à la droite } \Delta.$$

EXERCICE 4

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



Notons B_1 , (respectivement R_1 , V_1 , B_2 , R_2 et V_2) les événements « obtenir une face bleue (respectivement verte, rouge) au premier (respectivement deuxième) lancer ». Puisque les lancers de dés sont indépendants, on a

$$p(E) = p(V_1 \cap V_2) = p(V_1)p(V_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

et

$$p(F) = p(V_1 \cap V_2) + p(R_1 \cap R_2) + p(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

$$p(E) = \frac{1}{16} \text{ et } p(F) = \frac{3}{8}.$$

2) Notons X le nombre de parties à l'issue desquelles les deux faces sont de la même couleur. La variable aléatoire X est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « les deux faces sont de la même couleur » avec une probabilité $p = \frac{3}{8}$ (d'après la question 1)) ou « les deux faces sont de couleurs différentes » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

La probabilité demandée est $p(X \geq 2)$ et on a

$$\begin{aligned} p(X \geq 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \left(\frac{3}{8}\right)^0 \left(\frac{5}{8}\right)^{10} - \binom{10}{1} \left(\frac{3}{8}\right)^1 \left(\frac{5}{8}\right)^9 = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} - 10 \times \frac{3}{8} \left(\frac{5}{8}\right)^9 \\ &= 0,936 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins deux fois l'événement F au cours de 10 parties est 0,936 à 10^{-3} près par défaut.

Partie B

Erreur d'énoncé : $30 + 48 + 46 + 32 = 156 \neq 160$. Nous proposons une correction en prenant $n_1 = 34$ au lieu de $n_1 = 30$. La machine fournit

$$d_{\text{obs}}^2 = \left(\frac{34}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{48}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{46}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{32}{160} - \frac{1}{4}\right)^2 = 0,0078 \dots$$

On constate alors que $d_{\text{obs}}^2 < D_9$ et donc

on peut considérer au risque de 10% que le dé est parfaitement équilibré.