EXERCICE 1 (7 points)

Commun à tous les candidats

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(20x+10)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1) Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

2) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

3) Établir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α.

4) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

5) Calculer l'intégrale $I=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0)=10$.
On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0;+\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\frac{1}{2}y=20\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

1) Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2) On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0\,;+\infty[$, vérifiant $g(0)=10$. Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle : (E′) $y'+\frac{1}{2}y=0$.

b) Résoudre l'équation différentielle (E′).

c) Conclure.

3) Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.

4) La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne de cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;3]$.
Calculer la valeur exacte de θ, puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

BACCALAUREAT GENERAL

Session Septembre 2005

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

EXERCICE 1

Partie A

1) Pour tout réel positif x, on a

$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x} = 20xe^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x} = -40\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} + 10e^{-\frac{1}{2}x}.$$

On a déjà $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 10e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. D'autre part, d'après un théorème de croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -40\left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-\frac{1}{2}x} = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2) f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel positif x, on a

$$f'(x) = 20 \times e^{-\frac{1}{2}x} + (20x + 10) \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x} = (20 - (10x + 5))e^{-\frac{1}{2}x} = (-10x + 15)e^{-\frac{1}{2}x} = 10(-x + \frac{3}{2})e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Puisque $10e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-x + \frac{3}{2}$. Par suite, la fonction f' est strictement positive sur l'intervalle $[0, \frac{3}{2}[$, strictement négative sur l'intervalle $]\frac{3}{2}, +\infty[$ et s'annule en $\frac{3}{2}$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	10	$\nearrow$	$40e^{-3/4}$	$\searrow$	0

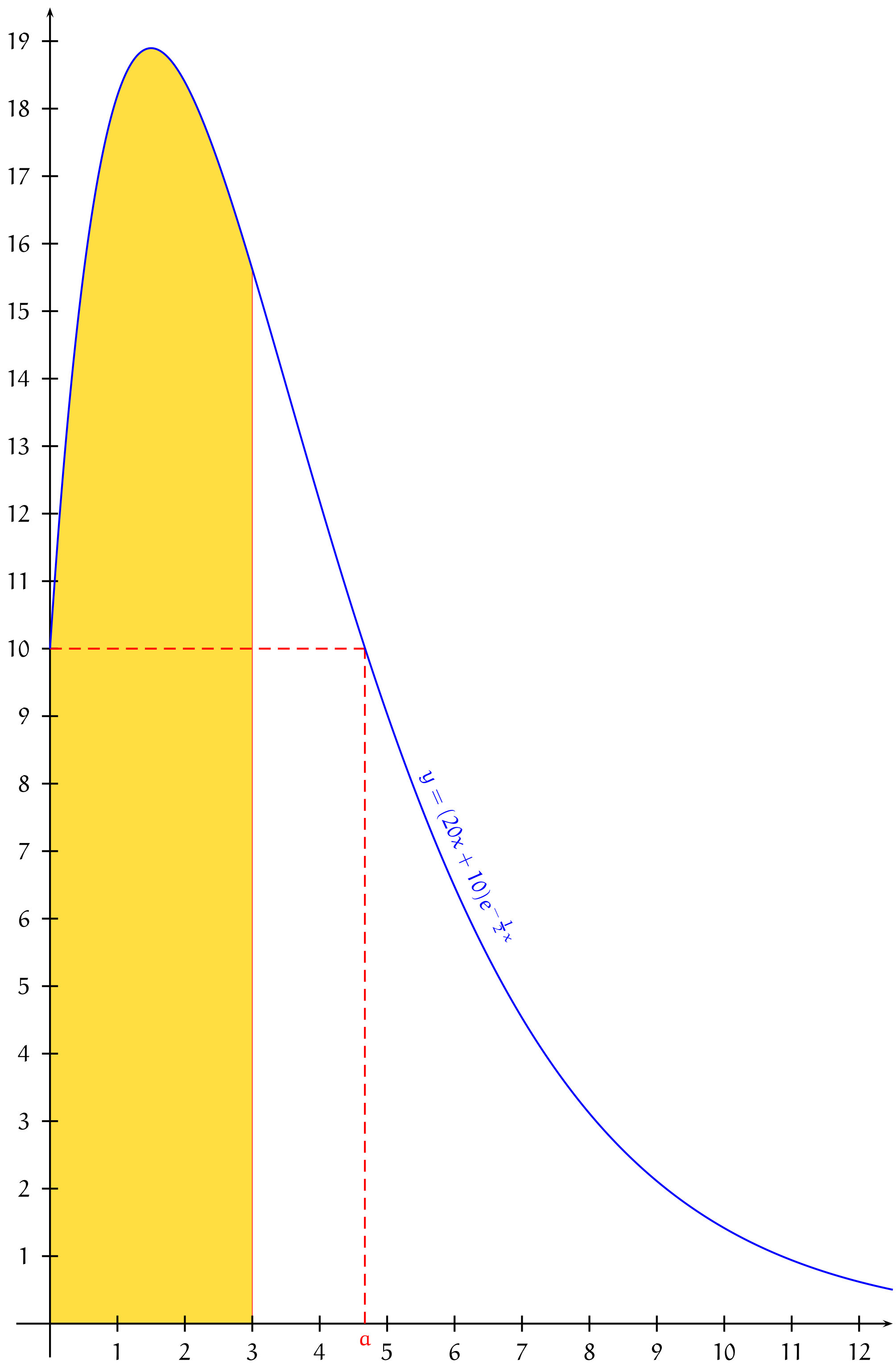
3) Déjà $f(0) = 10$. Ensuite, f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, \frac{3}{2}]$. Ainsi, si $x \in]0, \frac{3}{2}]$, $f(x) > f(0)$ ou encore $f(x) > 10$. L'équation $f(x) = 10$ n'a donc pas de solution dans l'intervalle $]0, \frac{3}{2}]$.
Sur l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. Puisque $f(\frac{3}{2}) = 40e^{-3/4}$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on sait que pour tout réel k de l'intervalle $]0, 40e^{-3/4}]$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $[\frac{3}{2}, +\infty[$. Comme $40e^{-3/4} = 18, 8\ldots$, on a $0 < 10 < 40e^{-3/4}$ et donc l'équation $f(x) = 10$ admet une solution et une seule dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.
En résumé,

$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = 10 \text{ possède une et une seule solution strictement positive notée } \alpha \text{ dans }]0, +\infty[.}$$

La machine donne $f(4,673) = 10,0009\ldots$ et $f(4,674) = 9,997\ldots$. Par suite, $f(4,673) > f(\alpha) > f(4,674)$ et donc, puisque f est strictement décroissante sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$, on a $4,673 < \alpha < 4,674$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 4,673 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par défaut.}}$$

4)



5) Calculons l'intégrale proposée à l'aide d'une intégration par parties.
Pour x élément de l'intervalle $[0, 3]$, posons $u(x) = (20x + 10)$ et $v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 3]$ et pour tout réel x de $[0, 3]$, $u'(x) = 20$ et $v'(x) = (-2)(-\frac{1}{2})e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$.

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^3 f(x)\ dx &= \int_0^3 (20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}\ dx \\ &= \left[(20x+10)(-2e^{-\frac{1}{2}x})\right]_0^3 - \int_0^3 20\times(-2e^{-\frac{1}{2}x})\ dx = -140e^{-1,5}+20+40\int_0^3 e^{-\frac{1}{2}x}\ dx \\ &= 20-140e^{-1,5}+40\left[-2e^{-\frac{1}{2}x}\right]_0^3 = 20-140e^{-1,5}+40(-2e^{-1,5}+2) = 100-220e^{-1,5}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^3 f(x)\ dx = 100-220e^{-1,5}.}$$

Partie B

1) D'après la question A.2., f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel t de $[0,+\infty[$, on a

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t) = (-10t+15)e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}(20t+10)e^{-\frac{1}{2}t} = (-10t+15+10t+5)e^{-\frac{1}{2}t} = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

$$\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur l'intervalle } [0,+\infty[.}$$

2) a) Soit g une solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que $g(0)=10$. $g-f$ est dérivable sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et pour tout réel t de $[0,+\infty[$,

$$(g-f)'(t)+\frac{1}{2}(g-f)(t) = \left(g'(t)+\frac{1}{2}g(t)\right)-\left(f'(t)+\frac{1}{2}f(t)\right) = 20e^{-\frac{1}{2}t}-20e^{-\frac{1}{2}t} = 0.$$

Donc, la fonction $g-f$ est solution de l'équation différentielle (E') sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

b) On sait que pour a réel donné, les solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto Ce^{at}$ où C est un réel. Donc les solutions de l'équation différentielle (E') sont les fonctions de la forme $t\mapsto Ce^{-\frac{1}{2}t}$ où C est un réel.

c) Il existe donc un réel C tel que pour tout réel positif t, $g(t)-f(t)=Ce^{-\frac{1}{2}t}$. Quand $t=0$, on obtient $Ce^0=g(0)-f(0)$ et donc $C=10-10=0$. Ainsi, pour tout réel positif t, on a $g(t)-f(t)=0$ et donc $g=f$.

$$\boxed{f \text{ est l'unique solution de l'équation différentielle } (E) \text{ sur } [0,+\infty[\text{ qui prend la valeur } 10 \text{ en } 0.}$$

3) Soit t_0 un réel positif. La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de t heures si et seulement si $t_0=\alpha$. Or $4,673<\alpha<4,674$ et de plus 4,673h = 4h 40,38min et 4,674h = 4h 40,34min. Donc t_0 = 4h 40min arrondi à la minute.

$$\boxed{\text{La température de la réaction chimique redescend à a valeur initiale au bout de 4h 40min (arrondi à la minute).}}$$

4) D'après la question A.5., $\theta = \dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(t)\ dt = \dfrac{100-220e^{-1,5}}{3} = 16,9\ldots$.

$$\boxed{\theta = \frac{100-220e^{-1,5}}{3} \text{ degrés Celsius} = 17^\circ \text{ (arrondi au degré).}}$$

