BACCALAUREAT GENERAL

Session 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages numérotées de 1 à 7. Les pages 6 et 7 sont des annexes à rendre avec la copie.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{x(x^2-1)}$.

a) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:

$$g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}.$$

b) Trouver une primitive G de g sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$.

Trouver une primitive F de f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3) En utilisant les résultats obtenus précédemment, calculer : $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x \,\mathrm{d}x$.

On donnera le résultat exact sous la forme $p\ln 2 + q\ln 3$, avec p et q rationnels.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y = y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1) Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln y}{y}$.

2) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b) Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h.
Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

c) Déterminer l'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

3) Soit λ un élément de l'intervalle $]0\,,\dfrac{1}{\mathrm{e}}[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\mathrm{e}[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.
Ainsi le couple (a, b) est solution de (E).

4) On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1\,;\mathrm{e}[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]\mathrm{e}\,;+\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

a) Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b) Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c) Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variation de s.

5) Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B.
Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K1 et K2.
L'expérience est modélisée de la façon suivante :

- une particule au hasard parmi les particules de type A entre dans K1 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et dans K2 avec la probabilité $\frac{2}{3}$;
- une particule au hasard parmi les particules de type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Partie A

1) Soit une particule au hasard.
Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,
A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,
B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,
B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,
C1 : « la particule entre dans K1 »,
C2 : « la particule entre dans K2 ».

2) On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction. Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
Calculer la probabilité de l'événement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0{,}75$. Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0{,}75\,e^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie* des particules de type A est égale à 5730 ans.

1) Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.

2) Au bout de combien d'années 10 % des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?

3) Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

* *temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.*

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.
Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = +\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.
Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1) Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.

2) Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].

3) Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.
Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = +\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

1) Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.

2) Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.

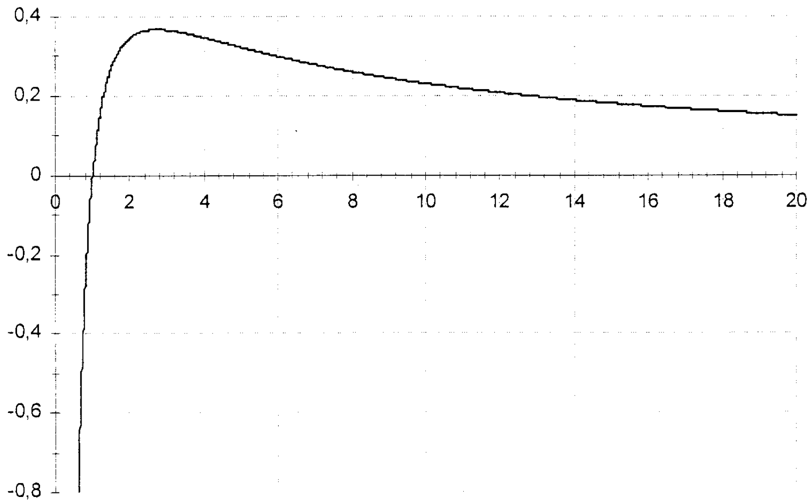
3) Montrer que l'image E′ du point E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E′ appartient au cercle Γ.

4) On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
Soit O′ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O′ est le centre de gravité du triangle ACE. En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 2

À rendre avec la copie

Courbe $\mathscr{C}$, obtenue à l'aide d'un traceur de courbe :



ANNEXE DE L'EXERCICE 4

À rendre avec la copie