BACCALAUREAT GENERAL

Session de Septembre 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

EXERCICE 1

1) a) Soient x un réel strictement supérieur à 1 et a, b et c trois réels.

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a}{x(x^2-1)}.$$

Si on choisit a, b et c de sorte que $-a=1$, $-b+c=0$ et $a+b+c=0$, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on aura $(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a=1$ et donc $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{1}{x(x^2-1)}$. Or

$$\left\{\begin{array}{l}-a=1\\-b+c=0\\a+b+c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\c=b\\-1+b+b=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\b=c=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x>1,\ \frac{1}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}.}$$

b) La fonction g est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$. g admet donc des primitives sur $]1,+\infty[$. Sur $]1,+\infty[$, on a $x>0$, $x+1>0$ et $x-1>0$ et donc, d'après la question précédente, une primitive de g sur $]1,+\infty[$ est la fonction $G\ :\ x\mapsto-\ln(x)+\dfrac{1}{2}\ln(x+1)+\dfrac{1}{2}\ln(x-1)$.

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } g \text{ sur l'intervalle }]1,+\infty[\text{ est la fonction } G\ :\ x\mapsto-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1).}$$

2) Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est la fonction $F\ :\ x\mapsto-\dfrac{1}{x^2-1}$.

3) Pour $x\in[2,3]$, posons $u(x)=F(x)$ et $v(x)=\ln(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[2,3]$ et pour $x\in[2,3]$, $u'(x)=f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$. De plus les fonction u' et v' sont continues sur l'intervalle $[2,3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx&=\left[-\frac{1}{x^2-1}\ln(x)\right]_2^3-\int_2^3-\frac{1}{x^2-1}\times\frac{1}{x}\,dx=-\frac{1}{3^2-1}\ln(3)+\frac{1}{2^2-1}\ln(2)+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}\,dx\\&=-\frac{1}{8}\ln(3)+\frac{1}{3}\ln(2)+\left[-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3\ \text{(d'après la question 1)a))}\\&=-\frac{1}{8}\ln(3)+\frac{1}{3}\ln(2)+\left(-\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{1}{2}\ln(2)\right)-\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(1)\right)\\&=\ln(2)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+1\right)+\ln(3)\left(-\frac{1}{8}-1-\frac{1}{2}\right)\ \text{(car } \ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2))\\&=\frac{17}{6}\ln(2)-\frac{13}{8}\ln(3).\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\frac{17}{6}\ln(2)-\frac{13}{8}\ln(3).}$$

EXERCICE 2

1) Soient x et y deux réels strictement positifs.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}.$$

2) a) D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$$

b) La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Soit x un réel strictement positif. Puisque $x^2 > 0$, $h'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$. Or

$$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow x < e \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}),$$

et

$$1 - \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Par suite, la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0, e]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[e, +\infty[$.
La fonction h admet donc un maximum en $x_0 = e$. Ce maximum est égal à $\dfrac{\ln(e)}{e}$ ou encore $\dfrac{1}{e}$.

$$\boxed{x_0 = e \text{ et } h(x_0) = \frac{1}{e}.}$$

c) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées } (1, 0).}$$

3) Soit λ un élément de $]0, \frac{1}{e}[$. Si x est un réel de $]0, 1]$, on a $h(x) \leq 0$ et en particulier, $h(x) \neq \lambda$.
La fonction h est continue et strictement croissante sur l'intervalle$]1, e[$. On sait alors que pour tout réel k élément de $]h(1), h(e)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]1, e[$. Mais $h(1) = 0$ et $h(e) = \dfrac{1}{e}$ de sorte que $h(0) < \lambda < h(e)$. L'équation $h(x) = \lambda$ admet donc une solution et une seule dans $]1, e[$, solution notée a.
De même, la fonction h est continue et strictement décroissante sur l'intervalle$]e, +\infty[$ et pour tout réel k élément de $]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(e)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]e, +\infty[$. Mais $h(e) = \dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < \lambda < h(e)$. L'équation $h(x) = \lambda$ admet donc une solution et une seule dans $]e, +\infty[$, solution notée b.

4) a) $\lim\limits_{\substack{a\to 1\\a>1}} s(a) = +\infty$.

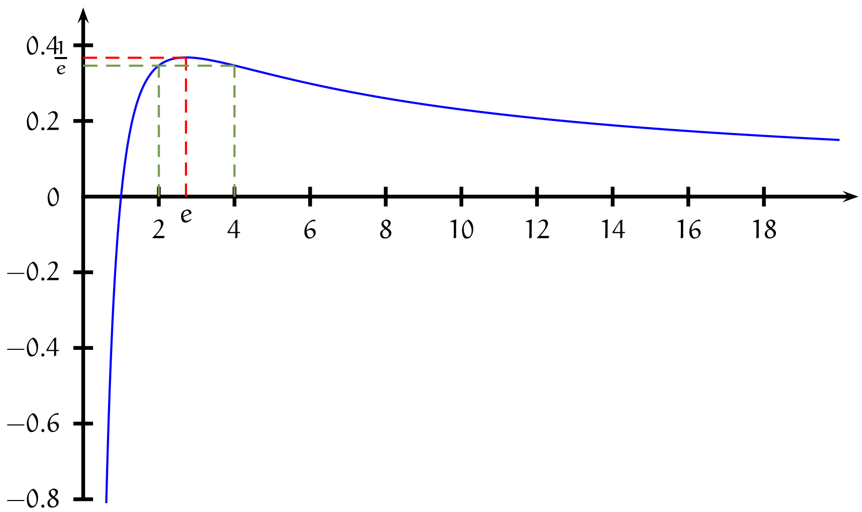
b) $\lim\limits_{\substack{a\to e\\a<e}} s(a) = e$.

c) Tableau de variations de s.

x	1	e
s	$+\infty$ ↘	e

5) Soient a et b sont deux entiers naturels tels que $1 \leq a < b$. Si $a^b = b^a$ alors, d'après la question 1), $h(a) = h(b)$. Mais alors d'après la question 3), on a nécessairement $1 < a < e$ et donc $a = 2$ puisque a est entier. Il existe alors exactement un réel b (et donc au plus un entier) dans l'intervalle $]e, +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$. Comme b doit être un entier, le graphique suggère de tester $b = 4$. On constate que $2^4 = 16 = 4^2$ et on a montré que

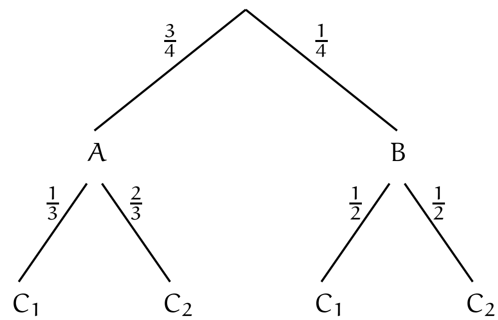
$$\boxed{\text{il existe deux couples d'entiers naturels distincts tels que } a^b = b^a \text{, les couples } (4, 2) \text{ et } (2, 4).}$$



EXERCICE 3

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre



$$p(A_1) = p(A \cap C_1) = p(A) \times p_A(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \text{ et } p(A_2) = p(A \cap C_2) = p(A) - p(A \cap C_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$p(B_1) = p(B \cap C_1) = p(B) \times p_B(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ et } p(B_2) = p(B \cap C_2) = p(B) - p(B \cap C_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(C_1) = p(C_1 \cap A) + p(C_1 \cap B) = p(A_1) + p(B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = 1 - p(C_1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$\boxed{p(A_1) = \frac{1}{4},\ p(A_2) = \frac{1}{2},\ p(B_1) = p(B_2) = \frac{1}{8},\ p(C_1) = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = \frac{5}{8}.}$$

2) Notons X le nombre de particules qui entrent dans K_2. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la particule entre dans K_2 » avec une probabilité $p = \dfrac{5}{8}$ (d'après 1)) ou « la particule n'entre pas dans K_2 » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{3}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{5}{8}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 10 \times \frac{5^2 \times 3^3}{8^5} = \frac{5^3 \times 3^3}{2^{14}} = \frac{3375}{16384} = 0,205 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie B

1) Soit λ un réel.

$$p(5730) = \frac{p(0)}{2} \Leftrightarrow 0,75e^{-5730\lambda} = \frac{0,75}{2} \Leftrightarrow e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{5730\lambda} = 2 \Leftrightarrow 5730\lambda = \ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{5730}.$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} = 0,00012 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

2) Soit t un réel positif.

$$p(t) \leq \frac{90}{100} \times p(0) \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} \leq 0,9 \times 0,75 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow e^{\lambda t} \geq \frac{10}{9} \Leftrightarrow \lambda t \geq \ln(\frac{10}{9}) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(10/9)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t \geq \frac{5730 \ln(10/9)}{\ln(2)} = 870,9\ldots.$$

Ainsi,

Au bout de 871 années (arrondi à l'unité), 10% au moins des particules de type A se seront transformées en des particules de type B.

3) Soit t un réel positif.

$$p(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{0,5}{0,75} \Leftrightarrow e^{\lambda t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda t = \ln(3/2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3/2)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{5730 \ln(3/2)}{\ln(2)} = 3351,8\ldots.$$

Au bout de 3352 années (arrondi à l'unité), il y aura autant de particules de type A que de particules de type B.

EXERCICE 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1) Voir figure à la fin.

2) B et C sont sur le cercle Γ et donc $OB = OC$. Le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$.
Le triangle BCD est équilatéral et donc $DB = DC$. Le point D est sur la médiatrice du segment $[BC]$.
Le triangle BCD est équilatéral et donc son centre de gravité à savoir le point G est aussi le centre de son cercle circonscrit. Par suite, $GB = GC$ et donc le point G est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

$$\boxed{\text{Les points } O, D \text{ et } G \text{ appartiennent à la médiatrice du segment } [BC].}$$

Puisque la droite (CG) n'est pas la droite (CB), le point M n'est pas le point B.
Puisque le point B est sur le cercle de diamètre $[AC]$, la droite (AB) qui est encore la droite (BM) est perpendiculaire à la droite (CB). Par suite, le triangle CBM est rectangle en B. Mais alors, le centre du cercle Γ' circonscrit au triangle CBM est le milieu du diamètre $[CM]$. Ce centre est aussi le point de la droite (CM) qui est sur la médiatrice de $[BC]$, c'est-à-dire le point G.

$$\boxed{G \text{ est le milieu du segment } [CM].}$$

3) L'angle de s est l'angle $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right)$. Puisque le triangle BCD est équilatéral direct et que les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont non nuls, colinéaires et de même sens,

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CG}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi].$$

Le rapport de s est $\dfrac{CM}{CB}$. Puisque le triangle CBM est rectangle en B,

$$\frac{CM}{CB} = \frac{1}{\cos\left(\widehat{BCM}\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\boxed{s \text{ est la similitude de centre } C, \text{ de rapport } \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ et d'angle } -\frac{\pi}{6}.}$$

Partie B

1) Puisque $AC = AE$ et que $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$, E est l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Par suite,

$$z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}(z_C - z_A) = -1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 - (-1)) = -1 + 1 + i\sqrt{3} = i\sqrt{3}.$$

$$\boxed{z_E = i\sqrt{3}.}$$

2) Ecrivons $\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle.

$$\frac{3 + i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

On sait alors que σ est une similitude directe de rapport $\left|\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right|$ ou encore $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\arg\left(\dfrac{3 + i\sqrt{3}}{4}\right)$ ou encore $\dfrac{\pi}{6}$.

Le centre de σ est le point invariant de σ. Soit donc Ω un point du plan dont l'affixe est notée ω.

$$\sigma(\Omega)=\Omega \Leftrightarrow \omega=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}\omega+\frac{1-i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1-i\sqrt{3}}{4}\omega=\frac{1-i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \omega=1=z_C.$$

On en déduit que le centre de la similitude σ est le point C.

$$\boxed{\sigma \text{ est la similitude de centre } C\text{, de rapport } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et d'angle } \frac{\pi}{6}.}$$

On sait que si Ω est un point, k est un réel strictement positif et θ un réel, la similitude de centre Ω, de rapport k et d'angle θ est une bijection du plan sur lui-même et que sa réciproque est la similitude de centre Ω, de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
Les résultats de la question A.3), nous permettent donc d'affirmer que

$$\boxed{\sigma=s^{-1}.}$$

3) $z_{E'}=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_E+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{3+i\sqrt{3}}{4}(i\sqrt{3})+\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}(3i\sqrt{3}-3+1-i\sqrt{3})=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\boxed{E' \text{ est le point d'affixe } -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

$OE'=|z_{E'}|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1=OA$ et donc

$$\boxed{E' \text{ appartient au cercle } \Gamma.}$$

4) Puisque $\sigma(E)=E'$, on a $s(E')=E$ d'après la question B.2). Comme E' est un point de Γ privé des points A et C, on en déduit que

$$\boxed{E \text{ est un point de } \mathscr{C}.}$$

L'expression complexe de s est $z'=z_C+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{6}}(z-z_C)$. En particulier

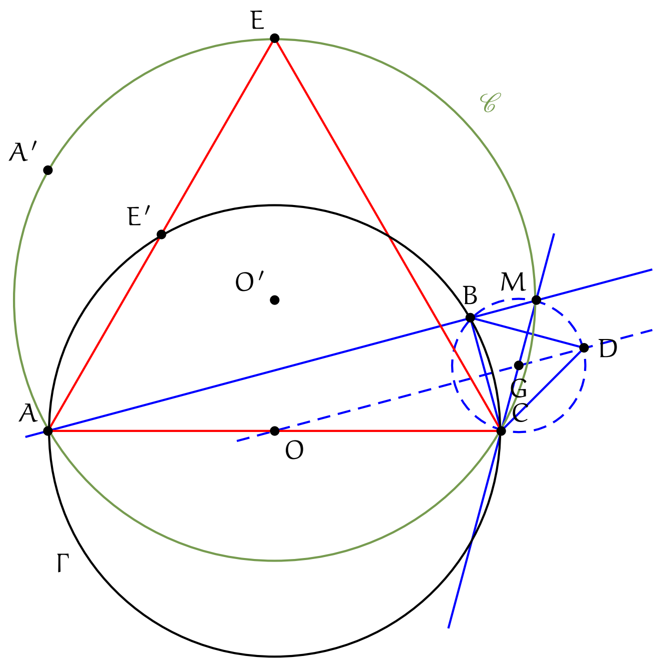
$$z_{O'}=1+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)(-1)=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}i=i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Notons alors g l'affixe du centre de gravité du triangle ACE.

$$g=\frac{1}{3}(z_A+z_C+z_E)=\frac{1}{3}\left(-1+1+i\sqrt{3}\right)=i\frac{\sqrt{3}}{3}=z_{O'}.$$

$$\boxed{O'=s(O) \text{ est le centre de gravité du triangle } ACE.}$$

$\mathscr{C}$ est l'image par la similitude s du cercle Γ de centre O passant par E' (d'après B.3)) et privé de A et de C et donc est le cercle de centre $s(O)=O'$ passant par $s(E')=E$ et privé des points $s(A)=A'$ (voir figure) et $s(C)=C$.


E
$\mathscr{C}$
A′
E′
O′
B
M
D
G
A
C
O
Γ

