BACCALAUREAT GENERAL

Session de Septembre 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire et Enseignement de Spécialité

Polynésie

EXERCICE 1

1. a. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ de même que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. De plus, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Mais alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$. De plus, pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{x} \times \sqrt{x} - \ln(x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} - 1 = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}\right) - 1 = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}} - 1 \\
&= \frac{2 - \ln(x) - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{-[-2 + 2x\sqrt{x} + \ln(x)]}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{-[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)]}{2x\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel strictement positif } x,\ f'(x) = \frac{-[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)]}{2x\sqrt{x}}.}$$

Mais alors, puisque pour tout réel x strictement positif x on a $x\sqrt{x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)]$ pour tout réel x strictement positif.

b. $N(1) = -[2(1\sqrt{1} - 1) + \ln(1)] = 0$. Soit alors x un réel strictement positif et distinct de 1.

- Si $0 < x < 1$, on a $x\sqrt{x} < 1 \times \sqrt{1}$ puis $x\sqrt{x} - 1 < 1 - 1$ et donc $2(x\sqrt{x} - 1) < 0$. D'autre part, $\ln(x) < 0$. Par suite, $2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x) < 0$ et finalement $N(x) > 0$.
- Si $x > 1$, on a $2(x\sqrt{x} - 1) > 0$, $\ln(x) > 0$ et donc $N(x) < 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } N \text{ est strictement positive sur }]0, 1[, \text{ strictement négative sur }]1, +\infty[\text{ et s'annule en } 1.}$$

c. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. La fonction f admet en particulier un maximum en 1 et comme $f(1) = \dfrac{\ln(1)}{\sqrt{1}} + 1 - 1 = 0$,

$$\boxed{\text{le point de la courbe } \mathscr{C} \text{ d'ordonnée maximale est le point de coordonnées } (1, 0).}$$

2. a. Soit α un réel élément de $]0, 1[$. D'après la question précédente, f admet sur $]0, +\infty[$ un maximum égal à 0 et en particulier f est négative sur $[\alpha, 1]$. Par suite $\mathscr{A}(\alpha) = -\displaystyle\int_\alpha^1 f(x)\, dx$. Déjà

$$-\int_\alpha^1 (1 - x)\, dx = -\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_\alpha^1 = -\left((1 - \frac{1}{2}) - (\alpha - \frac{\alpha^2}{2})\right) = -\frac{1}{2} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.$$

Calculons maintenant $-\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\, dx$.

Pour $x \in [\alpha, 1]$, posons $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = 2\sqrt{x}$. Les deux fonctions u et v sont dérivables sur $[\alpha, 1]$ et pour tout réel x de $[\alpha, 1]$, $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. De plus les fonctions u' et v' sont continues sur $[\alpha, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}-\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= -\left[\ln(x) \times 2\sqrt{x}\right]_\alpha^1 + \int_\alpha^1 \frac{1}{x} \times 2\sqrt{x}\,dx = -(0 - 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha)) + 2\int_\alpha^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) + 2\left[2\sqrt{x}\right]_\alpha^1 = 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) + 2(2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) + 4 - 4\sqrt{\alpha},\end{aligned}$$

et finalement,

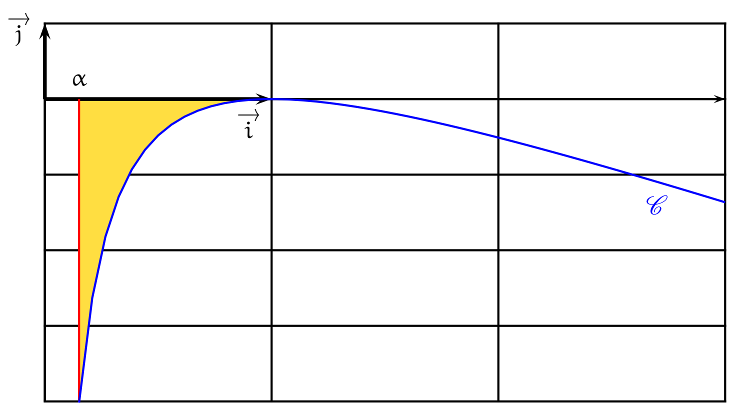
$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha) &= -\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1 - x\right)dx = -\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx - \int_\alpha^1 (1 - x)\,dx = 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) + 4 - 4\sqrt{\alpha} - \frac{1}{2} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2} \\ &= \frac{7}{2} + 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) - 4\sqrt{\alpha} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \alpha \text{ élément de }]0, 1[,\ \mathscr{A}(\alpha) = \frac{7}{2} + 2\sqrt{\alpha}\ln(\alpha) - 4\sqrt{\alpha} + \alpha - \frac{\alpha^2}{2}.}$$

b. Déjà, $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} -4\sqrt{\alpha} + \alpha - \dfrac{\alpha^2}{2} = 0$. D'autre part, d'après les théorèmes de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \sqrt{\alpha}\ln(\alpha) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\lim_{\substack{\alpha \to 0 \\ \alpha > 0}} \mathscr{A}(\alpha) = \frac{7}{2}.}$$

Graphiquement, cela signifie que l'aire exprimée en unités d'aire du domaine infini délimité par les axes (Ox) et (Oy), la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $\dfrac{7}{2}$ (et n'est donc pas infinie).



3. a. Soit x un réel élément de $[1, 2]$. D'après la question 1., on a $f(x) \leq 0$ ou encore $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1 - x \leq 0$. Mais alors

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq x - 1 \leq 2 - 1 = 1.$$

D'autre part, pour $x \in [1, 2]$, $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \geq 0$ et donc

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ élément de } [1, 2],\ 0 \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq 1.}$$

b. De la question précédente, on déduit encore que pour tout réel x de $[1, 2]$, on a $1 \leq \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1 \leq 2$ $(*)$.

Montrons alors que pour tout entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq 2$.

- Pour $n = 0$, on a bien $1 \leq u_0 \leq 2$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $1 \leq u_n \leq 2$. Alors d'après l'encadrement $(*)$, on a $1 \leq \dfrac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} + 1 \leq 2$ ou encore $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leq u_n \leq 2.}$$

4. Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} + 1 - u_n = f(u_n) \leq 0.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

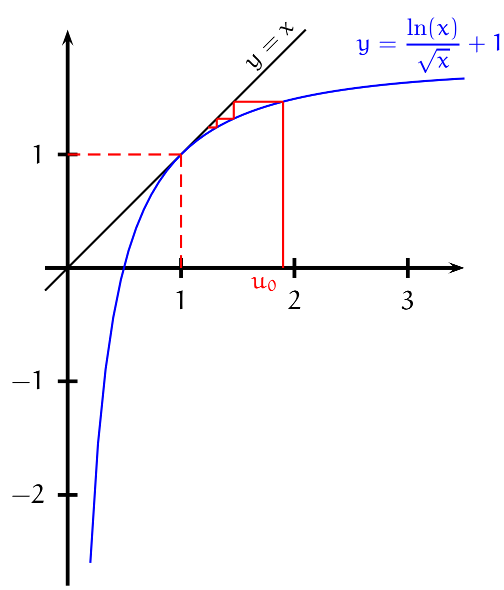
5. a. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons l sa limite.

b. Déjà, puisque pour tout entier naturel n on a $1 \leq u_n \leq 2$, quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 \leq l \leq 2$. Plus précisément, par continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1$ sur l'intervalle $[1, 2]$ et en particulier en l, on a

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} + 1\right) = \frac{\ln(l)}{\sqrt{l}} + 1.$$

Ceci s'écrit $\dfrac{\ln(l)}{\sqrt{l}} + 1 - l = 0$ ou encore $f(l) = 0$. La question 1. montre $l = 1$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.}$$



EXERCICE 2
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. a. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$M'' = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1.$$

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M'' = M \text{ sont les points de coordonnées } (0,0) \text{ et } (1,0).}$$

b. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$M'' = M' \Leftrightarrow z^2 = z - 2 \Leftrightarrow z^2 - z + 2 = 0 \ (*).$$

Le discriminant Δ de cette équation vaut $(-1)^2 - 4 \times 2$ ou encore -7. Par suite $\Delta = (i\sqrt{7})^2$. L'équation $(*)$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$

$$\boxed{\text{Les points } M \text{ tels que } M'' = M' \text{ sont les points de coordonnées } (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2}) \text{ et } (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2}).}$$

2. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Le point M' est sur (Oy) si et seulement si $z-2$ est imaginaire pur. Donc

$$M' \text{ appartient à } (Oy) \text{ si et seulement si il existe un réel } y \text{ tel que } z = 2 + iy.$$

Mais alors $z'' = (2+iy)^2 = 4 + 4iy - y^2 = (4 - y^2) + 4iy$ et donc

$$M'' \in (Oy) \Leftrightarrow 4 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = -2.$$

En résumé, M' et M'' appartiennent à (Oy) si et seulement si $z = 2+2i$ ou $z = 2-2i$. On note que $2+2i$ et $2-2i$ sont conjugués.

$$\boxed{\text{Il existe exactement deux points dont les quatre images sont sur } (Oy)\text{, les points } M_1(2,2) \text{ et } M_2(2,-2).}$$

3. a. Soit z un nombre complexe. Posons $z = x + iy$ où x et y sont deux réels.

$$\frac{z''-z}{z'-z} = \frac{z^2-z}{(z-2)-z} = \frac{1}{2}(-(x+iy)^2 + (x+iy)) = \frac{1}{2}(-x^2 - 2ixy + y^2 + x + iy) = \frac{-x^2+y^2+x}{2} + i\frac{-2xy+y}{2}.$$

b. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. Posons $z = x+iy$ où x et y sont deux réels.

• Quand $M'' = M$ ou $M'' = M'$ c'est-à-dire quand $z \in \{0, 1, \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\}$, les points M, M' et M'' sont alignés.

• D'autre part, pour tout complexe z, $z \neq z-2$ et donc $M \neq M'$. Ainsi, si $z \notin \{0, 1, \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\}$, les points M, M' et M'' sont deux à deux distincts. Dans ce cas,

$$M,\ M' \text{ et } M'' \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \frac{z''-z}{z'-z} \text{ réel.}$$

Maintenant, toujours pour $z \notin \{0, 1, \dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}, \dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}\}$,

$$\frac{z''-z}{z'-z} \text{ réel} \Leftrightarrow \frac{-2xy+y}{2} = 0 \Leftrightarrow y(-2x+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Enfin, les points d'affixes 0 et 1 sont sur la droite d'équation $y = 0$ et les points d'affixes $\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}$ et $\dfrac{1-i\sqrt{7}}{2}$ sont sur la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$ et finalement

$$\boxed{E \text{ est la réunion des droites d'équation } y = 0 \text{ et } x = \frac{1}{2}.}$$

Voir graphique à la fin de l'exercice.

4. **a.** On sait que Γ est le quart de cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ joignant les points de coordonnées $(\sqrt{3}, 0)$ et $(0, \sqrt{3})$. Γ' est le translaté de ce quart de cercle par la translation de vecteur de coordonnées $(-2, 0)$ et donc le quart de cercle de centre $(-2, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$ joignant les points de coordonnées $(-2+\sqrt{3}, 0)$ et $(-2, \sqrt{3})$.
Γ'' est l'ensemble des points d'affixe de la forme $z'' = 3e^{2i\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Quand θ décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$, 2θ décrit $[0, \pi]$ et donc Γ'' est le demi cercle de centre O et de rayon 3 joignant les points de coordonnées $(-3, 0)$ et $(3, 0)$ et passant par le point $(0, 3)$.

b. Voir figure plus loin.

c. On a $z_3 = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis $z_3' = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} - 2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_3'' = 3e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Par suite

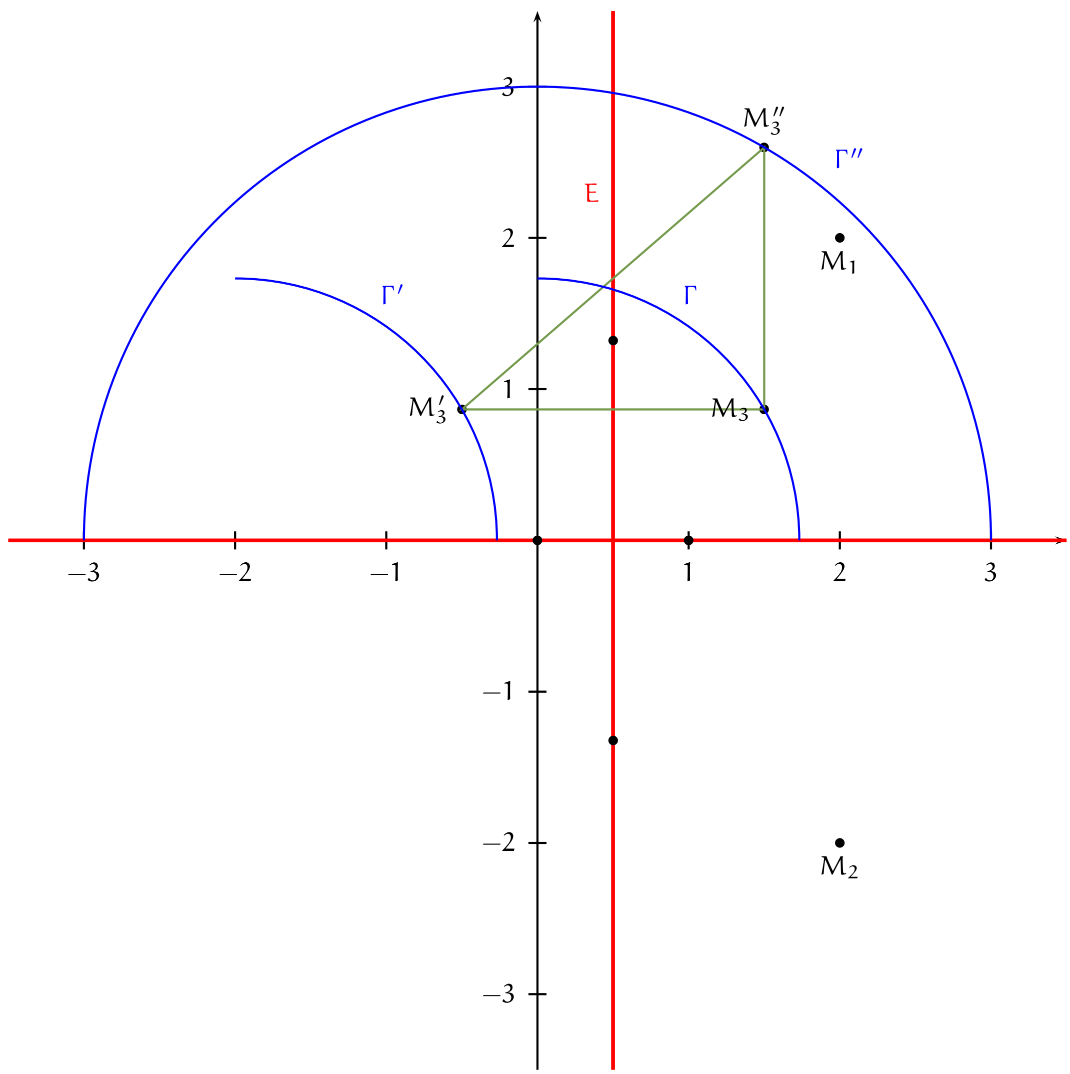
$$z_3' - z_3 = -2 \text{ et } z_3'' - z_3 = i\sqrt{3}.$$

Par suite

$$\left(\overrightarrow{M_3M_3'}, \overrightarrow{M_3M_3''}\right) = \arg\left(\frac{z_3'' - z_3}{z_3' - z_3}\right) = \arg\left(-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi],$$

et le triangle $M_3M_3'M_3''$ est rectangle en M_3. Enfin, si le triangle $M_3M_3'M_3''$ est isocèle, ce ne peut être qu'en M_3 mais $M_3M_3' = |z_3' - z_3| = 2$ et $M_3M_3'' = |z_3'' - z_3| = \sqrt{3}$ et donc $M_3M_3' \neq M_3M_3''$.

$$\boxed{\text{Le triangle } M_3M_3'M_3'' \text{ est rectangle en } M_3 \text{ mais non isocèle.}}$$



EXERCICE 2
(Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. a.

$$z_{A'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{(-1+i)} - 1 + i(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)(-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -\frac{-1-2i+1}{\sqrt{2}} - 1 + i(1+\sqrt{2})$$
$$= -\sqrt{2}i - 1 + i + i\sqrt{2} = -1 + i = z_A,$$

et

$$z_{C'} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}(-i\sqrt{2}) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -i(1+i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -i + 1 - 1 + i + i\sqrt{2} = i\sqrt{2} = z_C.$$

$$\boxed{f(A) = A \text{ et } f(C) = C.}$$

b. Puisque $\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, on sait que f est une isométrie indirecte, admettant d'après la question précédente deux points distincts invariants par f. On sait alors que f est une symétrie orthogonale. Plus précisément, puisque A et C sont invariants par f,

$$\boxed{f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite } (AC).}$$

c. Voir figure à la fin.

2. a. L'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est

$$z' = z_A + \sqrt{2}(z - z_A) = -1 + i + \sqrt{2}(z + 1 - i) = \sqrt{2}z - 1 + \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}z + (\sqrt{2} - 1)(1 - i).$$

b. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. On pose $M' = h(M)$ puis $M'' = f(M') = f(h(M))$ et on note z' et z'' les affixes respectives des points M' et M''. On a alors

$$z'' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z'} - 1 + i(1+\sqrt{2}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{(\sqrt{2}z + (\sqrt{2}-1)(1-i))} - 1 + i(1+\sqrt{2})$$
$$= \frac{1+i}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}\overline{z} + (\sqrt{2}-1)(1+i)) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = (1+i)\overline{z} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(1+i)^2 - 1 + i(1+\sqrt{2})$$
$$= (1+i)\overline{z} - 1 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}(1 + 2i - 1) + i(1+\sqrt{2}) = (1+i)\overline{z} - 1 + \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}i + i(1+\sqrt{2})$$
$$= (1+i)\overline{z} - 1 + i(\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) + 1 + \sqrt{2}) = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i.$$

$$\boxed{g \text{ est la transformation d'écriture complexe } z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i.}$$

3. a.

$$z_{M_0''} = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = 2 - 4 + 2i + 4i - 1 + 3i = -3 + 9i.$$

$$\boxed{M_0''(-3, 9)}$$

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(4, 1)$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ a pour coordonnées $(-2, 8)$. Par suite $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM_0''} = 4 \times (-2) + 1 \times 8 = 0$ et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.
b. Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z. On note note x et y les coordonnées de M.

$$z'' = (1+i)(x - iy) - 1 + 3i = (x + y - 1) + i(x - y + 3).$$

Par suite, les coordonnées de $\overrightarrow{AM''}$ sont $(x + y, x - y + 2)$. Mais alors

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM''} = 0 \Leftrightarrow 4 \times (x + y) + (x - y + 2) = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y = -2.$$

c. Si $x_0 = 2$ et $y_0 = -4$, alors $5x_0 + 3y_0 = 10 - 12 = -2$. Le couple $(x_0, y_0) = (2, -4)$ est donc une solution particulière de l'équation proposée (fournie par la question a.).

Soient x et y deux entiers relatifs.

$$5x + 3y = -2 \Rightarrow 5x + 3y = 5x_0 + 3y_0 \Rightarrow 5(x - x_0) = 3(y_0 - y).$$

L'entier 5 divise l'entier $5(x - x_0)$ et donc divise $3(y_0 - y)$. Mais les nombres premiers 5 et 3 sont premiers entre eux. Le théorème de Gauss permet alors d'affirmer que 5 divise $y_0 - y$. De même, 3 divise $x - x_0$. Ainsi, il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $x - x_0 = 3k$ et $y_0 - y = 3k'$ ou encore $x = x_0 + 3k = 2 + 3k$ et $y = y_0 - 3k' = -4 + 5k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = 2 + 3k$ et $y = -4 + 5k'$. On a

$$5x + 3y = 5(2 + 3k) + 3(-4 + 5k') = -2 + 15(k - k'),$$

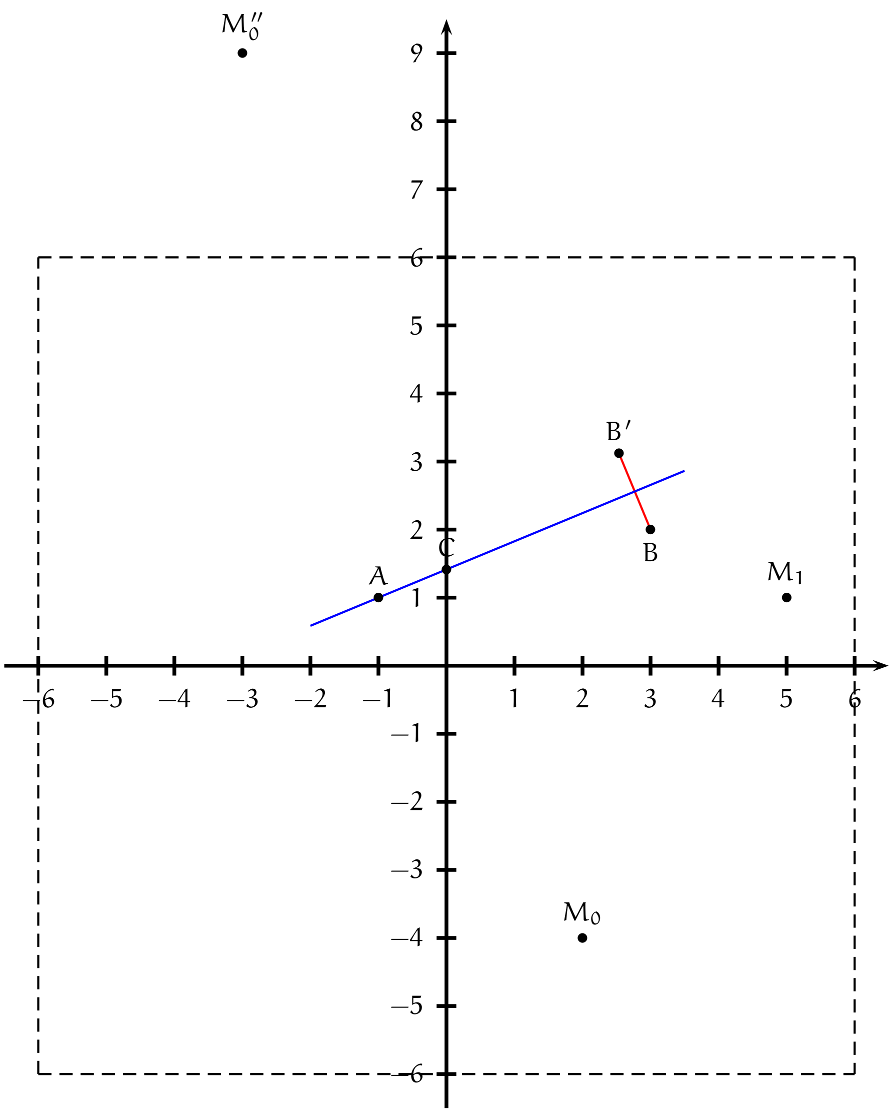
et donc le couple (x, y) est solution si et seulement si $15(k - k') = 0$ ce qui équivaut à $k = k'$.

Les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation $5x + 3y = -2$ sont les couples de la forme $(2 + 3k, -4 + 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

d. Soit k un entier relatif.

$$-6 \leq -4 + 5k \leq 6 \Leftrightarrow -2 \leq 5k \leq 10 \Leftrightarrow -\frac{2}{5} \leq k \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2.$$

De plus, si $k = 0$, $2+3k = 2 \in [-6, 6]$, si $k = 1$, $2+3k = 5 \in [-6, 6]$ et si $k = 2$, $2+3k = 8 \notin [-6, 6]$. Il y a donc exactement deux valeurs de k pour lesquelles les deux nombres x et y sont dans $[-6, 6]$ à savoir $k = 0$ et $k = 1$. $k = 0$ fournit le point de coordonnées $(2, -4)$ c'est-à-dire le point M_0 et $k = 1$ fournit le point M_1 de coordonnées $(5, 1)$.



EXERCICE 3

1. La plus petite valeur possible de la somme $a+b+4$ est $-2-1+4$ ou encore 1. En particulier, la somme $a+b-4$ n'est jamais nulle et donc quel que soit le tirage, G existe.

2. **a.** L'événement E_1 équivaut à $a=0$ et l'événement E_2 équivaut à $a=0$ et $b=1$.

Le nombre de tirages possibles est $6\times 5=30$. Parmi ces tirages, il y en a $1\times 5=5$ tels que $a=0$ et donc $p(E_1)=\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$ et il y en a $1\times 4=4$ tels que $a=0$ et $b=1$ et donc $p(E_2)=\dfrac{4}{30}=\dfrac{2}{15}$.

$$\boxed{p(E_1)=\frac{1}{6} \text{ et } p(E_2)=\frac{2}{15}.}$$

b. L'événement E_3 équivaut à $a>0$ et $b>0$ ou encore ($a=1$ ou $a=2$ ou $a=3$) et ($b=1$). Il y a $3\times 4=12$ tels tirages et donc $p(E_3)=\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$.

$$\boxed{p(E_3)=\frac{2}{5}.}$$

3. **a.** Notons X le nombre de fois où l'événement E_3 est réalisé. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'événement E_3 est réalisé » avec une probabilité $p=\dfrac{2}{5}$ (d'après 2.b.) ou « l'événement E_3 n'est pas réalisé » avec une probabilité $1-p=\dfrac{3}{5}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{2}{5}$.

On sait que l'espérance de X est np ou encore $\dfrac{2n}{5}$. Mais alors

$$E(X)=4\Leftrightarrow \frac{2n}{5}=4\Leftrightarrow n=10.$$

b. On a $p(X\geq 1)=1-p(X=0)=1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ et donc

$$\begin{aligned}
p(X\geq 1)\geq 0,999 &\Leftrightarrow 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\geq 0,999\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n\leq\frac{1}{1000}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{3}\right)^n\geq 1000\\
&\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{5}{3}\right)\geq \ln(1000) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[)\\
&\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(1000)}{\ln(5/3)}=13,5\ldots \text{ (car } \ln(\tfrac{5}{3})>0)\\
&\Leftrightarrow n\geq 14.
\end{aligned}$$

