BACCALAUREAT GENERAL

Session de Septembre 2004

MATHEMATIQUES

- Série S -

EnseignementObligatoire

EXERCICE 1

1) a) Soient x un réel strictement supérieur à 1 et a, b et c trois réels.

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{a(x+1)(x-1)+bx(x-1)+cx(x+1)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a}{x(x^2-1)}.$$

Si on choisit a, b et c de sorte que $-a=1$, $-b+c=0$ et $a+b+c=0$, pour tout réel x strictement supérieur à 1, on aura $(a+b+c)x^2+(-b+c)x-a=1$ et donc $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-1}=\frac{1}{x(x^2-1)}$. Or

$$\left\{\begin{array}{l}-a=1\\-b+c=0\\a+b+c=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\c=b\\-1+b+b=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-1\\b=c=\dfrac{1}{2}\end{array}\right..$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x>1,\ \frac{1}{x(x^2-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}.}$$

b) La fonction g est continue sur $]1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$. g admet donc des primitives sur $]1,+\infty[$. Sur $]1,+\infty[$, on a $x>0$, $x+1>0$ et $x-1>0$ et donc, d'après la question précédente, une primitive de g sur $]1,+\infty[$ est la fonction $G\ :\ x\mapsto-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$.

$$\boxed{\text{Une primitive de la fonction } g \text{ sur l'intervalle }]1,+\infty[\text{ est la fonction } G\ :\ x\mapsto-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1).}$$

2) Une primitive de f sur $]1,+\infty[$ est la fonction $F\ :\ x\mapsto-\frac{1}{x^2-1}$.

3) Pour $x\in[2,3]$, posons $u(x)=F(x)$ et $v(x)=\ln(x)$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[2,3]$ et pour $x\in[2,3]$, $u'(x)=f(x)=\frac{2x}{(x^2-1)^2}$ et $v'(x)=\frac{1}{x}$. De plus les fonction u' et v' sont continues sur l'intervalle $[2,3]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{2x}{(x^2-1)^2}\ln(x)\,dx&=\left[-\frac{1}{x^2-1}\ln(x)\right]_2^3-\int_2^3-\frac{1}{x^2-1}\times\frac{1}{x}\,dx=-\frac{1}{3^2-1}\ln(3)+\frac{1}{2^2-1}\ln(2)+\int_2^3\frac{1}{x(x^2-1)}\,dx\\&=-\frac{1}{8}\ln(3)+\frac{1}{3}\ln(2)+\left[-\ln(x)+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)\right]_2^3\ (\text{d'après la question 1)a)})\\&=-\frac{1}{8}\ln(3)+\frac{1}{3}\ln(2)+\left(-\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(4)+\frac{1}{2}\ln(2)\right)-\left(-\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(1)\right)\\&=\ln(2)(\frac{1}{3}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+1)+\ln(3)(-\frac{1}{8}-1-\frac{1}{2})\ (\text{car }\ln(4)=\ln(2^2)=2\ln(2))\\&=\frac{17}{6}\ln(2)-\frac{13}{8}\ln(3).\end{aligned}$$

$$\boxed{I=\frac{17}{6}\ln(2)-\frac{13}{8}\ln(3).}$$

EXERCICE 2

1) Soient x et y deux réels strictement positifs.

$$x^y = y^x \Leftrightarrow \ln(x^y) = \ln(y^x) \Leftrightarrow y\ln(x) = x\ln(y) \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y}.$$

2) a) D'après les théorèmes de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0.}$$

b) La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. De plus, pour tout réel $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$

Soit x un réel strictement positif. Puisque $x^2 > 0$, $h'(x)$ est du signe de $1-\ln(x)$. Or

$$1-\ln(x) > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln(x) \Leftrightarrow x < e \text{ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur } \mathbb{R}),$$

et

$$1-\ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Par suite, la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0,e]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[e,+\infty[$.
La fonction h admet donc un maximum en $x_0 = e$. Ce maximum est égal à $\dfrac{\ln(e)}{e}$ ou encore $\dfrac{1}{e}$.

$$\boxed{x_0 = e \text{ et } h(x_0) = \frac{1}{e}.}$$

c) Soit x un réel strictement positif.

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées } (1,0).}$$

3) Soit λ un élément de $]0,\frac{1}{e}[$. Si x est un réel de $]0,1]$, on a $h(x) \leq 0$ et en particulier, $h(x) \neq \lambda$.
La fonction h est continue et strictement croissante sur l'intervalle$]1,e[$. On sait alors que pour tout réel k élément de $]h(1),h(e)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]1,e[$. Mais $h(1) = 0$ et $h(e) = \dfrac{1}{e}$ de sorte que $h(0) < \lambda < h(e)$. L'équation $h(x) = \lambda$ admet donc une solution et une seule dans $]1,e[$, solution notée a.
De même, la fonction h est continue et strictement décroissante sur l'intervalle$]e,+\infty[$ et pour tout réel k élément de $]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), h(e)[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans l'intervalle $]e,+\infty[$. Mais $h(e) = \dfrac{1}{e}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$ de sorte que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) < \lambda < h(e)$. L'équation $h(x) = \lambda$ admet donc une solution et une seule dans $]e,+\infty[$, solution notée b.

4) a) $\lim\limits_{\substack{a\to 1\\ a>1}} s(a) = +\infty$.

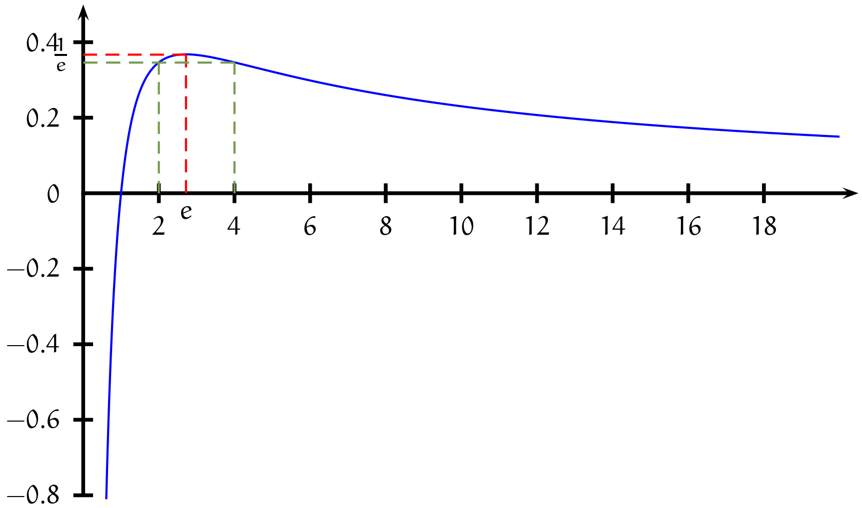
b) $\lim\limits_{\substack{a\to e\\ a<e}} s(a) = e$.

c) Tableau de variations de s.

x	1		e
s	$+\infty$	$\searrow$	e

5) Soient a et b sont deux entiers naturels tels que $1 \leq a < b$. Si $a^b = b^a$ alors, d'après la question 1), $h(a) = h(b)$. Mais alors d'après la question 3), on a nécessairement $1 < a < e$ et donc $a = 2$ puisque a est entier. Il existe alors exactement un réel b (et donc au plus un entier) dans l'intervalle $]e, +\infty[$ tel que $h(a) = h(b)$. Comme b doit être un entier, le graphique suggère de tester $b = 4$. On constate que $2^4 = 16 = 4^2$ et on a montré que

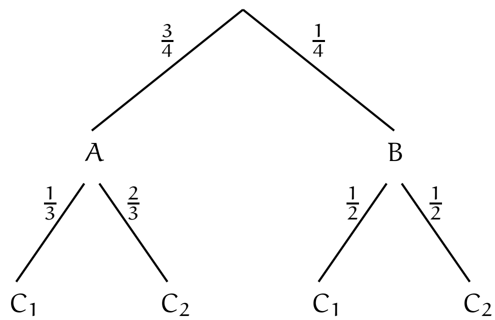
$$\boxed{\text{il existe deux couples d'entiers naturels distincts tels que } a^b = b^a \text{, les couples } (4,2) \text{ et } (2,4).}$$



EXERCICE 3

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre



$$p(A_1) = p(A \cap C_1) = p(A) \times p_A(C_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \text{ et } p(A_2) = p(A \cap C_2) = p(A) - p(A \cap C_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$p(B_1) = p(B \cap C_1) = p(B) \times p_B(C_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{ et } p(B_2) = p(B \cap C_2) = p(B) - p(B \cap C_1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Ensuite, d'après la formule des probabilités totales,

$$p(C_1) = p(C_1 \cap A) + p(C_1 \cap B) = p(A_1) + p(B_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = 1 - p(C_1) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$$

$$\boxed{p(A_1) = \frac{1}{4},\ p(A_2) = \frac{1}{2},\ p(B_1) = p(B_2) = \frac{1}{8},\ p(C_1) = \frac{3}{8} \text{ et } p(C_2) = \frac{5}{8}.}$$

2) Notons X le nombre de particules qui entrent dans K_2. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 5 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la particule entre dans K_2 » avec une probabilité $p = \frac{5}{8}$ (d'après 1)) ou « la particule n'entre pas dans K_2 » avec une probabilité $1 - p = \frac{3}{8}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{5}{8}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{5}{8}\right)^2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^3 = 10 \times \frac{5^2 \times 3^3}{8^5} = \frac{5^3 \times 3^3}{2^{14}} = \frac{3375}{16384} = 0,205 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Partie B

1) Soit λ un réel.

$$p(5730) = \frac{p(0)}{2} \Leftrightarrow 0,75e^{-5730\lambda} = \frac{0,75}{2} \Leftrightarrow e^{-5730\lambda} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{5730\lambda} = 2 \Leftrightarrow 5730\lambda = \ln(2) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{5730}.$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{5730} = 0,00012 \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}$$

2) Soit t un réel positif.

$$p(t) \leq \frac{90}{100} \times p(0) \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} \leq 0,9 \times 0,75 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} \leq \frac{9}{10} \Leftrightarrow e^{\lambda t} \geq \frac{10}{9} \Leftrightarrow \lambda t \geq \ln(\frac{10}{9}) \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(10/9)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t \geq \frac{5730 \ln(10/9)}{\ln(2)} = 870,9\ldots.$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Au bout de } 871 \text{ années (arrondi à l'unité), } 10\% \text{ au moins des particules de type } A \text{ se seront transformées en des particules de type } B.}$$

3) Soit t un réel positif.

$$p(t) = 0,5 \Leftrightarrow 0,75e^{-\lambda t} = 0,5 \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{0,5}{0,75} \Leftrightarrow e^{\lambda t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda t = \ln(3/2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3/2)}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{5730\ln(3/2)}{\ln(2)} = 3351,8\ldots.$$

$$\boxed{\text{Au bout de } 3352 \text{ années (arrondi à l'unité), il y aura autant de particules de type } A \text{ que de particules de type } B.}$$

EXERCICE 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1) Calculons le discriminant de l'équation $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

$$\Delta = (-8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64 = (8i)^2.$$

L'équation proposée admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir

$$z_1 = \frac{8\sqrt{3} + 8i}{2} = 4\sqrt{3} + 4i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 4\sqrt{3} - 4i.$$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0 \text{ sont } 4\sqrt{3} + 4i \text{ et } 4\sqrt{3} - 4i.}$$

2) a)

$$a = 4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8e^{-i\frac{\pi}{6}},$$

puis $b = \overline{a} = 8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

$$\boxed{a = 8e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ et } b = 8e^{i\frac{\pi}{6}}.}$$

b) $OA = |a - 0| = |8e^{-i\frac{\pi}{6}}| = 8$ et $OB = |b| = |a| = 8$. D'autre part, $AB = |b - a| = \left|(4\sqrt{3} + 4i) - (4\sqrt{3} - 4i)\right| = |8i| = 8$. Finalement, $OA = OB = AB = 8$ et donc le triangle OAB est équilatéral.

$$\boxed{\text{Le triangle OAB est équilatéral.}}$$

3) L'expression complexe de la rotation de centre 0 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z$ ou encore $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$. Donc

$$d = e^{-i\frac{\pi}{3}}c = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-\sqrt{3} + i) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3}{2}i = 2i.$$

$$\boxed{d = 2i.}$$

4) a) La somme des coefficients vaut $-1 + 1 + 1$ c'est-à-dire 1. Cette somme n'est pas nulle et donc G existe. De plus

$$g = \frac{-0 + d + b}{-1 + 1 + 1} = (2i) + (4\sqrt{3} + 4i) = 4\sqrt{3} + 6i.$$

$$\boxed{g = 4\sqrt{3} + 6i.}$$

b) Voir graphique à la fin de l'exercice.
c) On a $d - c = (2i) - (-\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} + i$ ou encore $\overrightarrow{CD}(\sqrt{3}, 1)$. D'autre part, $g - c = (4\sqrt{3} + 6i) - (-\sqrt{3} + i) = 5\sqrt{3} + 5i$ ou encore $\overrightarrow{CG}(5\sqrt{3}, 5)$. Par suite, $\overrightarrow{CG} = 5\overrightarrow{CD}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont colinéaires ou encore

les points C, D et G sont alignés.

d) $g - d = 4\sqrt{3} + 6i - 2i = 4\sqrt{3} + 4i = b - 0$ ou encore $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OB}$. Par suite

$$\boxed{\text{le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.}}$$

5) D'après la question 4)c), la droite (CG) est la droite (DG). Mais alors, d'après la question 4)d), la droite (CG) est parallèle à la droite (OB). Donc, l'angle $\widehat{ACG}$ est l'angle $\widehat{AOB}$ et l'angle $\widehat{AGC}$ est l'angle $\widehat{ABO}$ (angles correspondants). Mais d'après la question 2)b), le triangle OAB est équilatéral. On en déduit que le triangle AGC a trois angles égaux et donc que

$$\boxed{\text{le triangle } AGC \text{ est équilatéral.}}$$