EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1) **a)** Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c) En déduire le signe de f sur $\mathbf{R}$.

2) Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a) = \int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

a) Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b) A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

c) En déduire pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2} e^{a} I(a) = e^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

3) Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et $\mathscr{P}$ celle de h.

a) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.