

BACCALAUREAT GENERAL

Session de novembre 2009

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Limite en $-\infty$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

b) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Le trinôme du second degré $x(2-x) = -x^2 + 2x$ admet les deux racines 0 et 2 et, puisque le coefficient de x^2 est strictement négatif, on sait que $x(2-x) < 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et $x(2-x) > 0$ si $x \in]0, 2[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$		0		$4e^{-2}$		0

c) Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ et pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$. Donc pour tout réel x non nul, $f(x) > 0$. D'autre part, $f(0) = 0$. Le signe de f sur \mathbb{R} est donné par le tableau de signes :

x	$-\infty$	0	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	+

2) a) Soit a un réel. La fonction f est positive sur \mathbb{R} . Donc si $a \geq 0$, $I(a) \geq 0$ par positivité de l'intégrale. Si $a \leq 0$, toujours par positivité de l'intégrale, $\int_a^0 f(x) dx \geq 0$. Maintenant, $I(a) = \int_a^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$ et donc $I(a) \leq 0$.

Pour tout réel a , $I(a) \geq 0$ si $a \geq 0$ et $I(a) \leq 0$ si $a \leq 0$.

b) Soit a un réel. Notons K le segment $[0, a]$ si $a \geq 0$ ou $[a, 0]$ si $a \leq 0$. Pour x dans K , posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur K et pour x dans K on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v(x) &= -e^{-x} \\ u'(x) &= 2x & v'(x) &= e^{-x} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur K . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^a x^2 e^{-x} dx = [x^2(-e^{-x})]_0^a - \int_0^a (2x)(-e^{-x}) dx = -a^2 e^{-a} + 0 + 2 \int_0^a x e^{-x} dx \\ &= -a^2 e^{-a} + 2 \int_0^a x e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties.

$$\begin{aligned} I(a) &= -a^2 e^{-a} + 2 \int_0^a x e^{-x} dx = -a^2 e^{-a} + 2 \left([x(-e^{-x})]_0^a - \int_0^a (-e^{-x}) dx \right) \\ &= -a^2 e^{-a} + 2 \left(-ae^{-a} + 0 + \int_0^a e^{-x} dx \right) = -a^2 e^{-a} - 2ae^{-a} + 2 \left([-e^{-x}]_0^a \right) \\ &= -a^2 e^{-a} - 2ae^{-a} + 2(-e^{-a} + e^0) = 2 - 2e^{-a} - 2ae^{-a} - a^2 e^{-a} = 2 - 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout réel } a, I(a) = 2 - 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

c) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^a$, on obtient

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = \frac{1}{2}e^a \times 2 - \frac{1}{2}e^a \times 2e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

$$\text{Pour tout réel } a, \frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2} \right).$$

3) a) D'une part, $g(0) = h(0) = 1$ et d'autre part, $g'(0) = e^0 = 1$ et $h'(0) = 1 + 0 = 1$. Donc les tangentes à \mathcal{C} et \mathcal{P} en leur point d'abscisse 0 passent par le point de coordonnées (0,1) et ont même coefficient directeur. On en déduit que

les courbes \mathcal{C} et \mathcal{P} ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) D'après la question 2)c), pour tout réel x ,

$$g(x) - h(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} \right) = \frac{1}{2}e^x I(x).$$

Mais pour tout réel x , $\frac{1}{2}e^x > 0$. Donc pour tout réel x , $g(x) - h(x)$ est du signe de $I(x)$, signe qui a été étudié à la question 2)a). On en déduit que

\mathcal{C} est au-dessus de \mathcal{P} sur $[0, +\infty[$ et au-dessous sur $] -\infty, 0]$.

