EXERCICE 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1) **a)** Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c) En déduire le signe de f sur $\mathbf{R}$.

2) Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

a) Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b) A l'aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a)=2-2\mathrm{e}^{-a}\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right).$$

c) En déduire pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a}I(a)=\mathrm{e}^{a}-\left(1+a+\frac{a^2}{2}\right).$$

3) Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x$ et $h(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et $\mathscr{P}$ celle de h.

a) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

BACCALAUREAT GENERAL

Session de novembre 2009
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Nouvelle Calédonie

EXERCICE 1

1) a) Limite en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. Le trinôme du second degré $x(2-x) = -x^2+2x$ admet les deux racines 0 et 2 et, puisque le coefficient de x^2 est strictement négatif, on sait que $x(2-x) < 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et $x(2-x) > 0$ si $x \in]0, 2[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

c) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$. Donc pour tout réel x non nul, $f(x) > 0$. D'autre part, $f(0) = 0$. Le signe de f sur $\mathbb{R}$ est donné par le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

2) a) Soit a un réel. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$. Donc si $a \geqslant 0$, $I(a) \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. Si $a \leqslant 0$, toujours par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^0 f(x)\,dx \geqslant 0$. Maintenant, $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(x)\,dx$ et donc $I(a) \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ I(a) \geqslant 0 \text{ si } a \geqslant 0 \text{ et } I(a) \leqslant 0 \text{ si } a \leqslant 0.}$$

b) Soit a un réel. Notons K le segment $[0, a]$ si $a \geqslant 0$ ou $[a, 0]$ si $a \leqslant 0$. Pour x dans K, posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur K et pour x dans K on a

$$u(x) = x^2 \qquad v(x) = -e^{-x}$$
$$u'(x) = 2x \qquad v'(x) = e^{-x}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur K. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^a x^2e^{-x}\,dx = \left[x^2(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (2x)(-e^{-x})\,dx = -a^2e^{-a} + 0 + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx \\
&= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Effectuons une nouvelle intégration par parties.

$$\begin{aligned}
I(a) &= -a^2e^{-a} + 2\int_0^a xe^{-x}\,dx = -a^2e^{-a} + 2\left(\left[x(-e^{-x})\right]_0^a - \int_0^a (-e^{-x})\,dx\right) \\
&= -a^2e^{-a} + 2\left(-ae^{-a} + 0 + \int_0^a e^{-x}\,dx\right) = -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2\left(\left[-e^{-x}\right]_0^a\right) \\
&= -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} + 2(-e^{-a} + e^0) = 2 - 2e^{-a} - 2ae^{-a} - a^2e^{-a} = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ I(a) = 2 - 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

c) En multipliant les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{1}{2}e^a$, on obtient

$$\frac{1}{2}e^a I(a) = \frac{1}{2}e^a \times 2 - \frac{1}{2}e^a \times 2e^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } a,\ \frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).}$$

3) a) D'une part, $g(0) = h(0) = 1$ et d'autre part, $g'(0) = e^0 = 1$ et $h'(0) = 1 + 0 = 1$. Donc les tangentes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ en leur point d'abscisse 0 passent par le point de coordonnées $(0, 1)$ et ont même coefficient directeur. On en déduit que

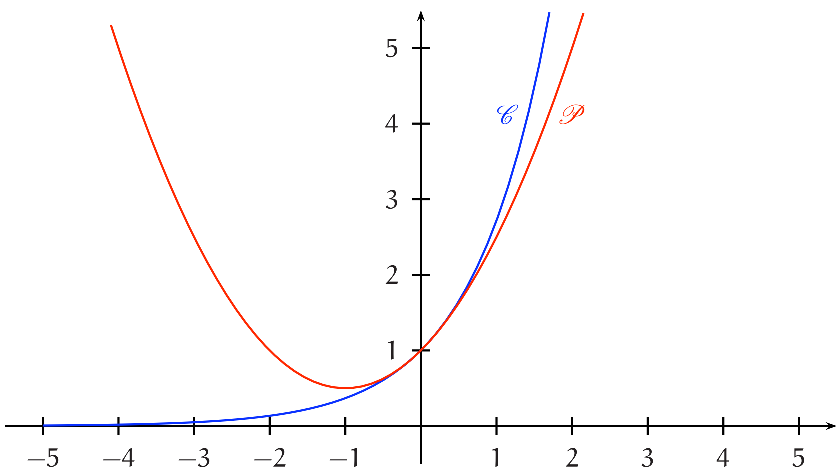
$$\boxed{\text{les courbes } \mathscr{C} \text{ et } \ \text{ont la même tangente au point d'abscisse } 0.}$$

b) D'après la question 2)c), pour tout réel x,

$$g(x) - h(x) = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}e^x I(x).$$

Mais pour tout réel x, $\frac{1}{2}e^x > 0$. Donc pour tout réel x, $g(x) - h(x)$ est du signe de $I(x)$, signe qui a été étudié à la question 2)a). On en déduit que

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est au-dessus de } \mathscr{P} \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et au-dessous sur }]-\infty, 0].}$$



 © Jean-Louis Rouget, 2010. Tous droits réservés.