EXERCICE 4 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = (1+x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

1. **a.** Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

d. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx.$$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n > 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

EXERCICE 4

1) a) Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f(x)$ est du signe de $1+x$. On en déduit le tableau de signes

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b) • Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} 1+x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+x)e^{-x} = -\infty$.

• Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel x, $f(x) = e^{-x} + xe^{-x}$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{-x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

c) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

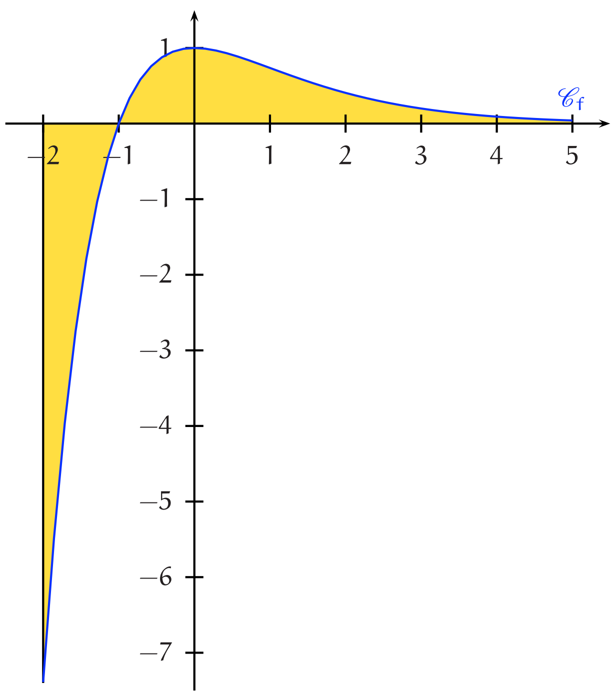
$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+1) \times (-e^{-x}) = (1-x-1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc $f'(x)$ est du signe de $-x$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$f(0) = (1+0)e^0 = 1$

d) Graphe.



2) a) Soit n un entier naturel. D'après la question 1)a), la fonction f est positive sur $[-1,+\infty[$ et en particulier sur $[-1,n]$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $I_n \geqslant 0$.

Plus précisément, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{-1}^{-1/2} f(x)\,dx + \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{n} f(x)\,dx \geqslant 0 + \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx + 0 = \int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx.$$

D'après la question 1)c), la fonction f est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Par suite,

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } \left[-\frac{1}{2}, 0\right],\ f(x) \geqslant f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{2}.$$

D'après l'inégalité de la moyenne, $\int_{-1/2}^{0} f(x)\,dx \geqslant \left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times \frac{e^{1/2}}{2}$. Finalement, $I_n \geqslant \frac{e^{1/2}}{4} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n > 0.}$$

b) Soit n un entier naturel. D'après la relation de Chasles

$$I_{n+1} - I_n = \int_{-1}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx + \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{n} f(x)\,dx = \int_{n}^{n+1} f(x)\,dx.$$

La fonction f est positive sur le segment $[n, n+1]$ et donc, par positivité de l'intégrale, $\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx \geqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel n, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

3) a) Pour x appartenant à $[a, b]$, posons $u(x) = x + 1$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les deux fonctions u et v sont définies et dérivables sur le segment $[a, b]$ et pour tout réel x de $[a, b]$, $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^{-x}$. De plus les deux fonctions u' et v' sont continues sur le segment $[a, b]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et en posant

$$\begin{array}{ll} u(x) = x + 1 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x+1)e^{-x}\,dx &= \left[(x+1)\times(-e^{-x})\right]_a^b - \int_a^b 1 \times (-e^{-x})\,dx \\
&= -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + \int_a^b e^{-x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + \left[-e^{-x}\right]_a^b = -(b+1)e^{-b} + (a+1)e^{-a} + (-e^{-b} + e^{-a}) \\
&= (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous réels } a \text{ et } b,\ \int_a^b f(x)\,dx = (-2-b)e^{-b} + (2+a)e^{-a}.}$$

b) Quand $a = -1$ et $b = n$, on obtient

$$I_n = (-2-n)e^{-n} + (2-1)e^{1} = e - (n+2)e^{-n}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_n = e - (n+2)e^{-n}.}$$

c) Pour tout entier naturel n, $(n+2)e^{-n} = \frac{n}{e^n} + \frac{2}{e^n}$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e^n} = 0$ et d'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} e - (n+2)e^{-n} = e$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = e.}$$

d) Puisque la fonction f est positive sur $[-1, +\infty[$, la limite est « l'aire du domaine infini » délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses.

4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e &\Leftrightarrow e - (\alpha+2)e^{-\alpha} = e \Leftrightarrow (\alpha+2)e^{-\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2 = 0 \text{ (car pour tout réel } x,\ e^{-x} \neq 0) \\
&\Leftrightarrow \alpha = -2.
\end{aligned}$$

La fonction f est négative sur le segment $[-2,-1]$ et donc l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-2$ et $x=-1$ est $\displaystyle\int_{-2}^{-1}(-f(x))\,dx$ ou encore $\displaystyle\int_{-1}^{-2}f(x)\,dx$.
En résumé, ce calcul intégral correspond à un calcul d'aire.

Remarque. Cette aire est égale à e d'après le calcul précédent et est la même que l'aire du domaine infini de la question 3)d).

