BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0$.

• $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \dfrac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\dfrac{1}{2}$.

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. .$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ 50a - 100a = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = -100a \\ a = \dfrac{1}{100} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0,01 \\ b = -1 \end{array}\right. .$$

Donc,

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ f(x) = xe^{0,01x-1}.}$$

2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{0,01x-1} = \lim_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. D'autre part, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = \frac{100}{e} \times \frac{e}{100} \times x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{100}{e} \times e \times e^{-1} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim_{X\to-\infty} Xe^{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0 = 0$. Finalement,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x, $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.
Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100$. Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]-100, +\infty[$, strictement négative sur $]-\infty, -100[$ et s'annule en -100.

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-100e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5) Pour tout réel x,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x\left(1 - e^{0,01x-1}\right).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} 1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01} \\ &\Leftrightarrow x < 100, \end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Etudions alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - e^{0,01x-1}$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0, 0)$ et $B(0, 100)$.

6) a) Pour t dans $[0, 100]$, posons $u(t) = t$ et $v(t) = 100e^{0,01t-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 100]$ et pour t dans $[0, 100]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & v(t) = 100e^{0,01t-1} \\ u'(t) = 1 & v'(x) = e^{0,01t-1} \end{array}$$

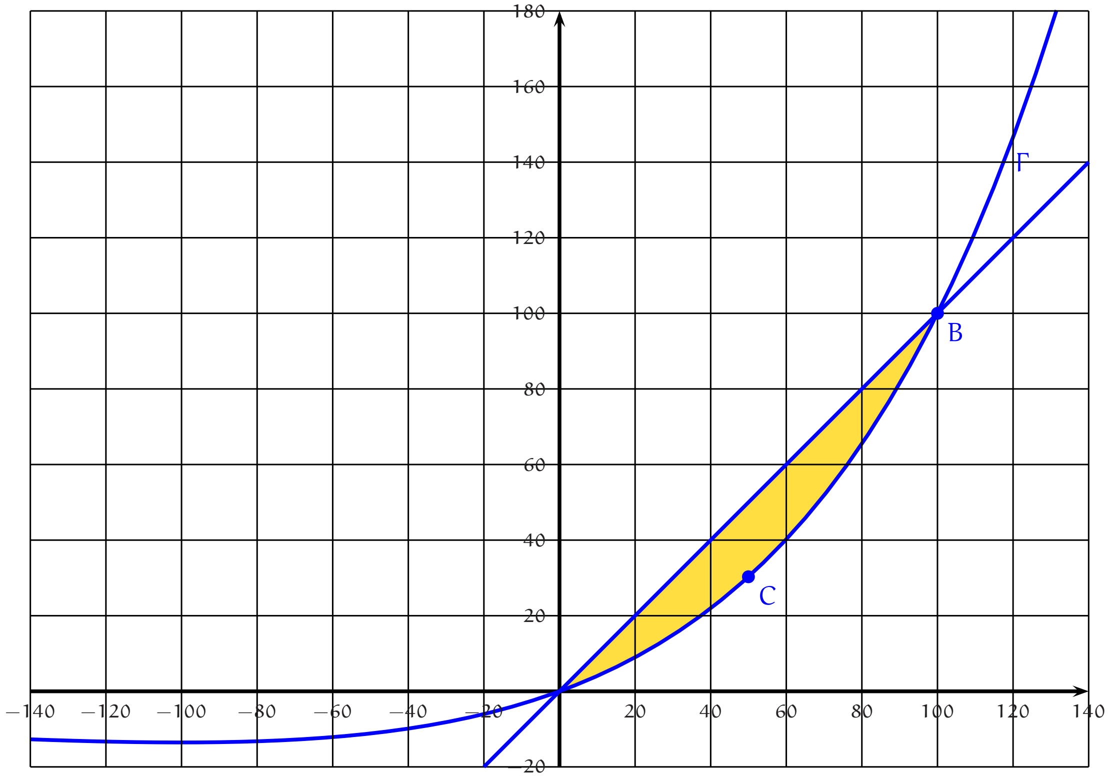
De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 100]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t)\ dt &= \left[t \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} - \int_0^{100} 1 \times 100e^{0,01t-1}\ dt = 100 \times 100e^0 - 0 - \int_0^{100} 100e^{0,01t-1}\ dt \\ &= 10000 - \left[100 \times 100e^{0,01t-1}\right]_0^{100} = 10000 - 10000\left(1 - e^{-1}\right) = \frac{10000}{e}. \end{aligned}$$

b) D'après la question 4), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0, 100]$. Donc,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{100} (t - f(t))\ dt = \int_0^{100} t\ dt - \int_0^{100} f(t)\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e} \\ &= \frac{5000(e-2)}{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{A = \frac{5000(e-2)}{e}.}$$



180
160
140
120
100
80
60
40
20
−20
−140
−120
−100
−80
−60
−40
−20
20
40
60
80
100
120
140
Γ
B
C

