

EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $B(100; 100)$ et $C\left(50; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur \mathbb{R} dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ .

1. a) Montrer que le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

b) En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a) Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

b) En déduire la limite de f en $-\infty$.

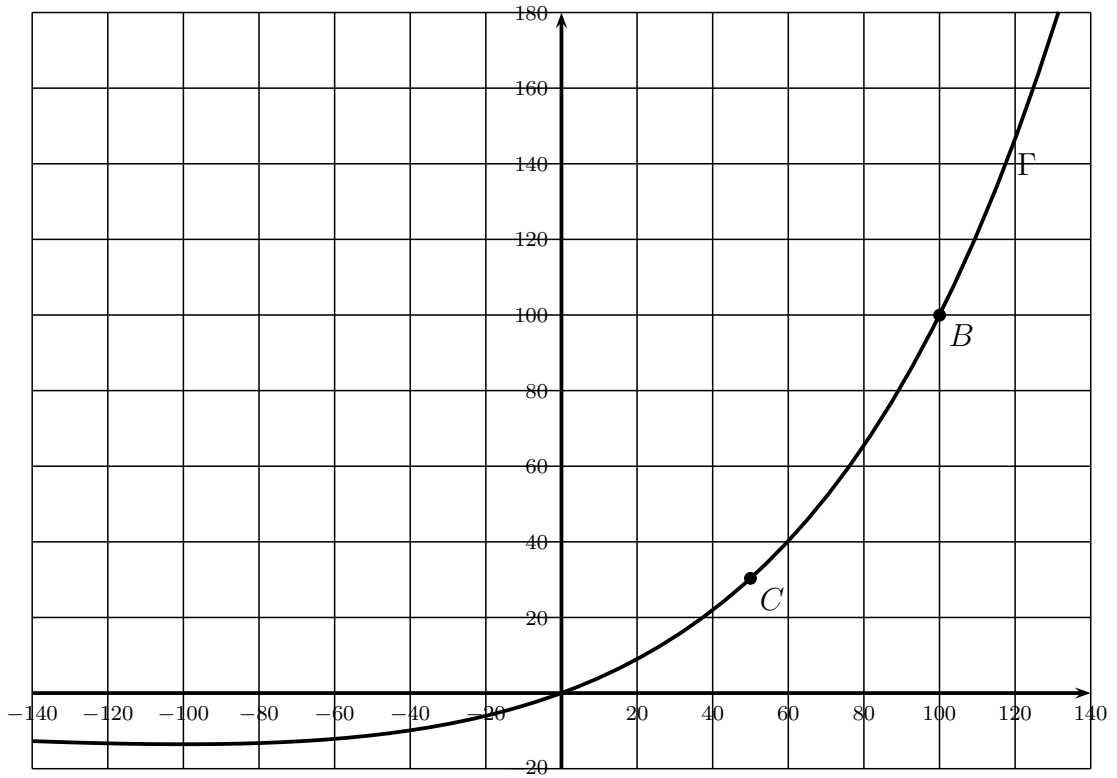
4. Étudier les variations de la fonction f . On donnera le tableau de variations complet.

5. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D) .

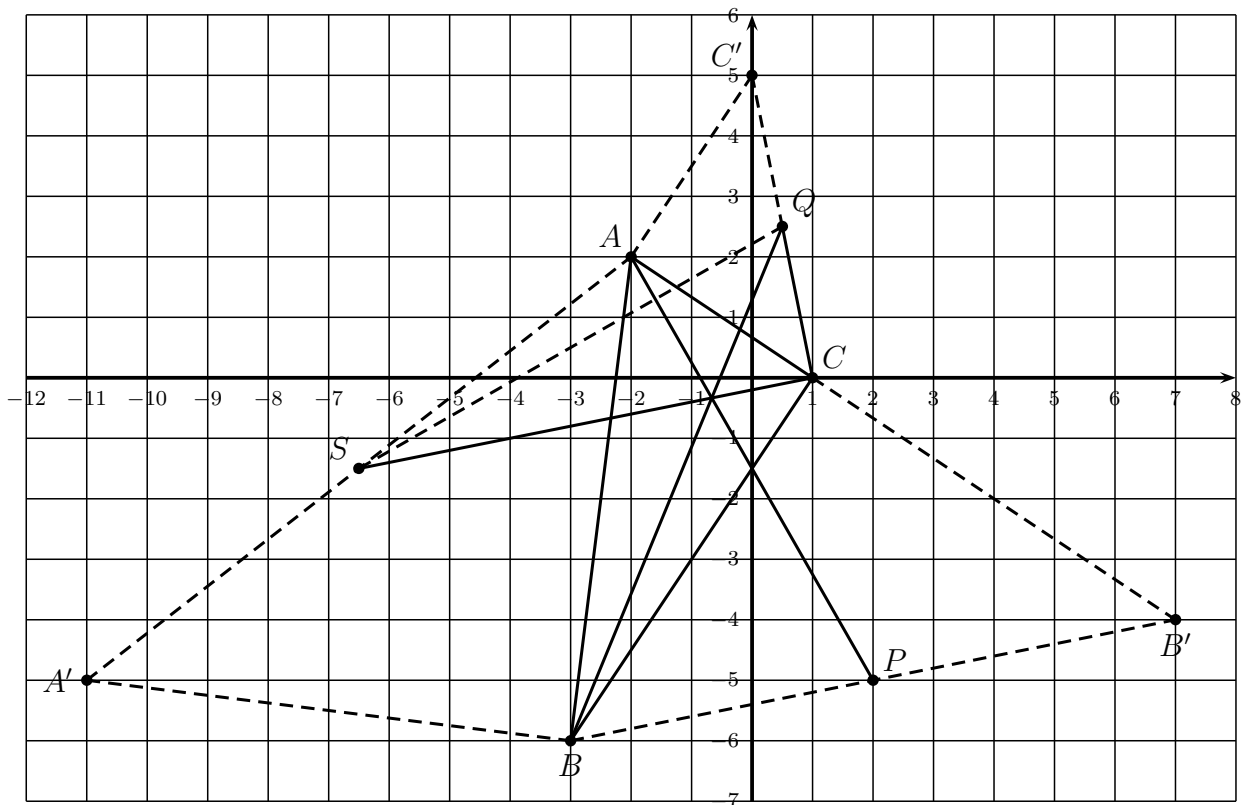
6. a) Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{100} f(t) dt$.

b) On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ . Calculer A .

Annexe de l'exercice 1



Annexe de l'exercice 2



BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Polynésie

EXERCICE 1

1) a) • $B \in \Gamma \Leftrightarrow f(100) = 100 \Leftrightarrow 100e^{100a+b} = 100 \Leftrightarrow e^{100a+b} = 1 \Leftrightarrow 100a + b = \ln 1 \Leftrightarrow 100a + b = 0.$

• $C \in \Gamma \Leftrightarrow f(50) = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow 50e^{50a+b} = \frac{50}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow e^{50a+b} = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 50a + b = -\frac{1}{2}.$

Donc le couple $(a; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

b)

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ 50a - 100a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ a = \frac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,01 \\ b = -1 \end{cases}.$$

Donc,

$$\text{pour tout réel } x, f(x) = xe^{0,01x-1}.$$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,01x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^X = +\infty.$ D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et en multipliant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3) a) Soit x un réel.

$$f(x) = xe^{0,01x-1} = \frac{100}{e} \times \frac{e}{100} \times x \times e^{0,01x} \times e^{-1} = \frac{100}{e} \times e \times e^{-1} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,01xe^{0,01x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ d'après un théorème de croissances comparées puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x} = \frac{100}{e} \times 0 = 0.$ Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

4) La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{0,01x-1} + x \times (0,01x - 1)'e^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}.$$

Pour tout réel x , $e^{0,01x-1} > 0$ et donc pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $1 + 0,01x$.

Or, $1 + 0,01x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{0,01} \Leftrightarrow x > -100$ et de même $1 + 0,01x = 0 \Leftrightarrow x = -100.$ Donc, la fonction f' est strictement positive sur $]-100, +\infty[$, strictement négative sur $]-\infty, -100[$ et s'annule en $-100.$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-100	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	0	$-100e^{-2}$	$+\infty$

5) Pour tout réel x ,

$$f(x) - x = xe^{0,01x-1} - x = x(1 - e^{0,01x-1}).$$

Etudions le signe de $1 - e^{0,01x-1}$. Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} 1 - e^{0,01x-1} > 0 &\Leftrightarrow -e^{0,01x-1} > -1 \Leftrightarrow e^{0,01x-1} < 1 \Leftrightarrow 0,01x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{0,01} \\ &\Leftrightarrow x < 100, \end{aligned}$$

et de même $1 - e^{0,01x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 100$. Etudions alors le signe de $f(x) - x$ dans un tableau de signes.

x	$-\infty$	0	100	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$1 - e^{0,01x-1}$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - x$	$+$	0	$-$	$+$

On en déduit que Γ est strictement au-dessus de Δ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]100, +\infty[$, strictement au-dessous sur $]0, 100[$ et enfin, Γ et Δ se coupent aux points $O(0, 0)$ et $B(0, 100)$.

6) a) Pour t dans $[0, 100]$, posons $u(t) = t$ et $v(t) = 100e^{0,01t-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 100]$ et pour t dans $[0, 100]$, on a

$$\begin{aligned} u(t) &= t & v(t) &= 100e^{0,01t-1} \\ u'(t) &= 1 & v'(t) &= e^{0,01t-1} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 100]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) dt &= [t \times 100e^{0,01t-1}]_0^{100} - \int_0^{100} 1 \times 100e^{0,01t-1} dt = 100 \times 100e^0 - 0 - \int_0^{100} 100e^{0,01t-1} dt \\ &= 10000 - [100 \times 100e^{0,01t-1}]_0^{100} = 10000 - 10000(1 - e^{-1}) = \frac{10000}{e}. \end{aligned}$$

b) D'après la question 4), la courbe Γ est au-dessous de la droite (D) sur $[0, 100]$. Donc,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{100} (t - f(t)) dt = \int_0^{100} t dt - \int_0^{100} f(t) dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{100} - \frac{10000}{e} = \frac{10000}{2} - \frac{10000}{e} = \frac{10000(e-2)}{2e} \\ &= \frac{5000(e-2)}{e}. \end{aligned}$$

$$A = \frac{5000(e-2)}{e}.$$

