EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$.

Sur la courbe $\mathscr{C}$, tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1. On a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe $\mathscr{C}$. On a placé les points $A'(a;0)$ et $B'(1;0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 xe^x \, dx = 1$.

2. **a)** Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à $\dfrac{1}{2}\left(-a^2e^a + ae^a - ae + e\right)$.

b) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{1}{2}\left(ae^a - ae + e - 2\right)$.

PARTIE B :

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = x(e^x - e) + e - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par $g''(x) = (2 + x)e^x$.

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.

3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.

5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a.

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE