EXERCICE 4

PARTIE A

1) Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x)=x$ et $v(x)=e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour $x \in [0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x)=x & v(x)=e^x \\ u'(x)=1 & v'(x)=e^x \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x\,dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1\times e^x\,dx = e^1 - 0 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 \\ &= e-(e-1)=1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 xe^x\,dx = 1.}$$

2) a) L'aire du triangle OAA' est

$$\text{aire de}(OAA') = \frac{OA'\times AA'}{2} = \frac{a\times ae^a}{2} = \frac{1}{2}a^2e^a.$$

L'aire du trapèze $ABB'A'$ est

$$\text{aire de}(ABB'A') = \frac{(AA'+BB')\times A'B'}{2} = \frac{(ae^a+e)(1-a)}{2} = \frac{1}{2}(-a^2e^a+ae^a-ae+e).$$

b) La fonction f est continue et positive sur $[0,1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire et notée $\mathscr{A}$, de la partie du plan comprise l'axe (Ox) et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ d'autre part est $\int_0^1 f(x)\,dx$ c'est-à-dire 1 d'après la question 1.

D'après le graphique fourni en annexe, l'aire de la partie du plan hachurée, exprimée en unités d'aire est

$$\begin{aligned}\mathscr{A}' &= \text{aire de}(OAA') + \text{aire de}(ABB'A') - \mathscr{A} = \frac{1}{2}a^2e^a + \frac{1}{2}(-a^2e^a+ae^a-ae+e) - 1 \\ &= \frac{1}{2}(a^2e^a - a^2e^a + ae^a - ae + e - 2) = \frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2).\end{aligned}$$

PARTIE B

1) La fonction $x \mapsto x(e^x-e)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$. Mais alors, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = (e^x-e) + x(e^x) + 0 = xe^x + e^x - e.$$

De nouveau la fonction g' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g''(x) = 1\times e^x + xe^x + e^x = (2+x)e^x.$$

2) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $e^x > 0$ et $x+2>0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, $g''(x)>0$. Mais alors, la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

3) • $g'(0) = (2+0)e^0 = 2$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - e = +\infty$ et en additionnant, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty$.

• La fonction g' est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $[g'(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)[= [1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x)=k$ admet une solution et une seule dans $[0,+\infty[$. En particulier, puisque $1-e<0$ et donc que 0 appartient à $[1-e,+\infty[$, l'équation $g'(x)=0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $[0,+\infty[$.

La calculatrice fournit $g'(0,5) = -0,2\ldots < 0$ et $g'(0,6) = 0,1\ldots > 0$. Ainsi, $g'(0,5) < g'(\alpha) < g'(0,6)$ et donc, puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $0,5<\alpha<0,6$. Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 0,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}}$$

4) Puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $g'(x) < g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g'(x) > g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

5) En particulier, la fonction g admet un minimum en α avec $\alpha \in [0, 1]$. D'après la question 2)b) de la partie A, pour tout $a \in [0, 1]$, l'aire de la partie du plan hachurée est $\dfrac{g(a)}{2}$. La question précédente permet d'affirmer que cette aire est minimale quand $a = \alpha$.

