

EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = xe^x$.

On désigne par \mathcal{C} la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.

Sur la courbe \mathcal{C} , tracée en annexe, on a placé les points A et B d'abscisses respectives a et 1 . On a tracé les segments $[OA]$ et $[AB]$. On a hachuré la partie du plan délimitée par les segments $[OA]$ et $[AB]$ et la courbe \mathcal{C} . On a placé les points $A'(a; 0)$ et $B'(1; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la valeur du nombre réel a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée en annexe est minimale.

PARTIE A :

1. Montrer que $\int_0^1 xe^x dx = 1$.
2. a) Donner l'aire du triangle OAA' et montrer que l'aire du trapèze $ABB'A'$ est égale à $\frac{1}{2}(-a^2e^a + ae^a - ae + e)$.
b) En déduire que l'aire de la partie du plan hachurée est $\frac{1}{2}(ae^a - ae + e - 2)$.

PARTIE B :

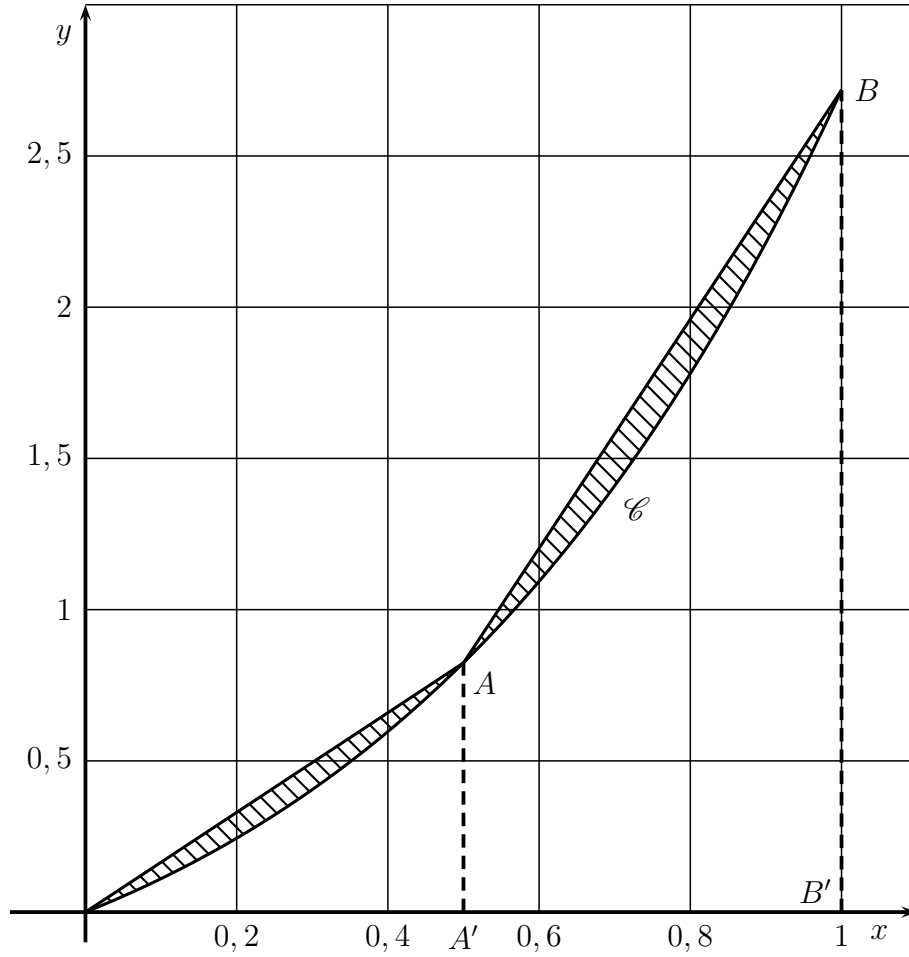
Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = x(e^x - e) + e - 2.$$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g . Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0; +\infty[$. Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $[0; +\infty[$ par $g''(x) = (2 + x)e^x$.
2. En déduire les variations de la fonction g' sur $[0; +\infty[$.
3. Établir que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
4. En déduire les variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$.
5. En utilisant les réponses aux questions des parties A et B, montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle l'aire de la partie du plan hachurée est minimale. Donner cette valeur de a .

Annexe

CETTE PAGE N'EST PAS À RENDRE AVEC LA COPIE



EXERCICE 4

PARTIE A

1) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}u(x) &= x & v(x) &= e^x \\u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^x\end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx = e^1 - 0 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 \\&= e - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 x e^x dx = 1.}$$

2) a) L'aire du triangle OAA' est

$$\text{aire de}(OAA') = \frac{OA' \times AA'}{2} = \frac{a \times a e^a}{2} = \frac{1}{2} a^2 e^a.$$

L'aire du trapèze $ABB'A'$ est

$$\text{aire de}(ABB'A') = \frac{(AA' + BB') \times A'B'}{2} = \frac{(a e^a + e)(1 - a)}{2} = \frac{1}{2} (-a^2 e^a + a e^a - a e + e).$$

b) La fonction f est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire et notée \mathcal{A} , de la partie du plan comprise l'axe (Ox) et la courbe \mathcal{C} d'une part et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part est $\int_0^1 f(x) dx$ c'est-à-dire 1 d'après la question 1.

D'après le graphique fourni en annexe, l'aire de la partie du plan hachurée, exprimée en unités d'aire est

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= \text{aire de}(OAA') + \text{aire de}(ABB'A') - \mathcal{A} = \frac{1}{2} a^2 e^a + \frac{1}{2} (-a^2 e^a + a e^a - a e + e) - 1 \\&= \frac{1}{2} (a^2 e^a - a^2 e^a + a e^a - a e + e - 2) = \frac{1}{2} (a e^a - a e + e - 2).\end{aligned}$$

PARTIE B

1) La fonction $x \mapsto x(e^x - e)$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$. Mais alors, la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) = (e^x - e) + x(e^x) + 0 = x e^x + e^x - e.$$

De nouveau la fonction g' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$,

$$g''(x) = 1 \times e^x + x e^x + e^x = (2 + x) e^x.$$

2) Pour tout réel $x \geq 0$, $e^x > 0$ et $x + 2 > 0$. Donc, pour tout réel $x \geq 0$, $g''(x) > 0$. Mais alors, la fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

3) • $g'(0) = (2 + 0)e^0 = 2$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = +\infty$. Ensuite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - e = +\infty$ et en additionnant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = +\infty$.

• La fonction g' est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On sait alors que pour tout réel k de $[g'(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)[= [1 - e, +\infty[$, l'équation $g'(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque $1 - e < 0$ et donc que 0 appartient à $[1 - e, +\infty[$, l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α , dans $[0, +\infty[$.

La calculatrice fournit $g'(0,5) = -0,2 \dots < 0$ et $g'(0,6) = 0,1 \dots > 0$. Ainsi, $g'(0,5) < g'(\alpha) < g'(0,6)$ et donc, puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, $0,5 < \alpha < 0,6$. Ainsi,

$$\alpha = 0,5 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

- 4) Puisque la fonction g' est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leq x < \alpha$, alors $g'(x) < g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $g'(x) > g'(\alpha)$ ou encore $g'(x) > 0$. Ainsi, la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.
- 5) En particulier, la fonction g admet un minimum en α avec $\alpha \in [0, 1]$. D'après la question 2)b) de la partie A, pour tout $a \in [0, 1]$, l'aire de la partie du plan hachurée est $\frac{g(a)}{2}$. La question précédente permet d'affirmer que cette aire est minimale quand $a = \alpha$.