

EXERCICE 3 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|------------------|---|
| Variables : | i et n sont des entiers naturels. u est un réel. |
| Entrée : | Demander à l'utilisateur la valeur de n . |
| Initialisation : | Affecter à u la valeur 0. |
| Traitement : | Pour i variant de 1 à n . Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$. |
| Sortie : | Afficher u |

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3} .

| | | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1000 | 1500 | 2000 |
| u_n | 0,697 | 0,674 | 0,658 | 0,647 | 0,638 | 0,632 | 0,626 | 0,582 | 0,578 | 0,578 | 0,577 |

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite (u_n) telle que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n).$$

où f est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

2. a. Soit k un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$.

En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

Démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1).

- b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- c. En déduire que pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$.

3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.