

EXERCICE 3

Partie A

1) La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1. \text{ Par suite, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{X \rightarrow 1} \ln(X) = \ln(1) = 0.$$

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. En additionnant, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

2) La fonction $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $\frac{x}{x+1} > 0$. On sait alors que la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est

dérivable sur $[1, +\infty[$. D'autre part, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1, +\infty[$. Finalement, la fonction f est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1, +\infty[$,

1er calcul :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x + (x+1)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x+1)^2}. \end{aligned}$$

2ème calcul :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(x+1)'}{(x+1)^2} + (\ln(x))' - (\ln(x+1))' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{-x + x^2 + 2x + 1 - x - x^2}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2}. \end{aligned}$$

3) Pour tout réel x de $[1, +\infty[$, $f'(x) > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Mais alors, pour tout x de $[1, +\infty[$, on a $f(x) < \lim_{+\infty} f$ ou encore $f(x) < 0$.

La fonction f est strictement négative sur $[1, +\infty[$.

Partie B

1) • Initialisation : $u = 0$.

• Etape 1 : $i = 1$ puis $u = 0 + \frac{1}{1} = 1$.

• Etape 2 : $i = 2$ puis $u = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

• Etape 3 : $i = 3$ puis $u = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

Si $n = 3$, la valeur exacte affichée par l'algorithme est $\frac{13}{6}$.

2)

Variables :	i et n sont des entiers naturels. u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n .
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n . Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher $u - \ln(n)$

3) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente de limite approximativement égale à 0,57.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) + \ln(n)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1}$$

D'après la question 3) de la partie A, le fonction f est strictement négative sur $]1, +\infty[$. En particulier, pour tout entier $n \geq 1$, $f(n) < 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n , on a $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc

la suite (u_n) est strictement décroissante.

2) a) Soit k un entier strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $[k, k+1]$.

Donc l'intégrale $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx$ existe.

Pour tout réel x de l'intervalle $[k, k+1]$, on a $x \geq k > 0$ puis $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[$) et donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$.

Ainsi, pour tout réel x de $[k, k+1]$, on a $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} \times (k+1 - k) - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx.$$

Par suite, $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geq 0$ ou encore $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.

Enfin, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$ et on a donc montré que

pour tout entier k strictement positif, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1).

b) Soit n un entier strictement positif. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{rcl} \ln(2) - \ln(1) & \leq & 1 \\ \ln(3) - \ln(2) & \leq & \frac{1}{2} \\ \ln(4) - \ln(3) & \leq & \frac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ln(n-1) - \ln(n-2) & \leq & \frac{1}{n-2} \\ \ln(n) - \ln(n-1) & \leq & \frac{1}{n-1} \\ \ln(n+1) - \ln(n) & \leq & \frac{1}{n} \end{array}$$

On additionne membre à membre ces n inégalités. Dans le premier membre, les nombres $\ln(2), \ln(3), \dots, \ln(n-1)$ et $\ln(n)$ se simplifient et il reste $-\ln(1) + \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On retranche $\ln(n)$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente et on obtient $\ln(n+1) - \ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ ou encore

$$u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n).$$

Par croissance de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$, on a $\ln(n+1) \geq \ln(n)$ puis $\ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$. Par suite, $u_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) \geq 0$. On a montré que

pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$.

3) La suite (u_n) est décroissante d'après la question 1) et minorée par 0 d'après la question 2). On en déduit que la suite (u_n) converge.