

EXERCICE 2

1) a) La fonction G est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$G'(x) = \frac{1}{2} \times (x^2)' e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2xe^{x^2} = xe^{x^2} = g(x).$$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction g sur \mathbb{R} .

$$\text{b) } I_1 = \int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e-1}{2}.$$

$$I_1 = \frac{e-1}{2}.$$

$$\text{c) Soit } n \text{ un entier naturel non nul. } I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}e^{x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2} dx.$$

Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x^{n+1} & v(x) &= \frac{1}{2}e^{x^2} \\ u'(x) &= (n+1)x^n & v'(x) &= xe^{x^2} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 x^{n+1} \times xe^{x^2} dx = \left[x^{n+1} \times \frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2}e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^1 - 0 \times \frac{1}{2}e^0 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n. \end{aligned}$$

$$\text{d) } I_3 = \frac{e}{2} - \frac{1+1}{2}I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e}{2} - \frac{3+1}{2}I_3 = \frac{e}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}.$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e-2}{2}.$$

2) n prend successivement les valeurs 1, 3, 5, ..., 19.

• Quand $n = 1$, $u = I_1$ puis, comme $1 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}I_1 = I_3$ puis $n = 3$.

• Puisque $n = 3 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}I_3 = I_5$ puis $n = 5$.

⋮

• Puisque $n = 17 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{17+1}{2}I_{17} = I_{19}$ puis $n = 19$.

• Puisque $n = 19 < 21$, $u = \frac{1}{2}e - \frac{19+1}{2}I_{19} = I_{21}$ puis $n = 21$ et l'algorithme s'arrête.

Finalement, en sortie, on obtient I_{21} .

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n e^{x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 x^n e^{x^2} dx \geq 0$. On a montré que

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, I_n \geq 0.$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 x^n e^{x^2} dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} dx = \int_0^1 (x^n e^{x^2} - x^{n+1} e^{x^2}) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n (1-x) e^{x^2} dx. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n(1-x)e^{x^2} dx \geq 0$ et donc $\int_0^1 x^n(1-x)e^{x^2} dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale ou encore $I_n - I_{n+1} \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n $I_n - I_{n+1} \geq 0$ ou encore pour tout entier naturel non nul n $I_{n+1} \leq I_n$ et donc

la suite (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (I_n) est convergente vers un réel ℓ positif ou nul.

4) Supposons $\ell > 0$. D'après la question 1)c), pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $I_n = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}I_{n-2}$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n-2} = \ell > 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2}I_{n-2} = +\infty$ puis que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2}I_{n-2} = -\infty$. Ceci est une contradiction et donc $\ell = 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.