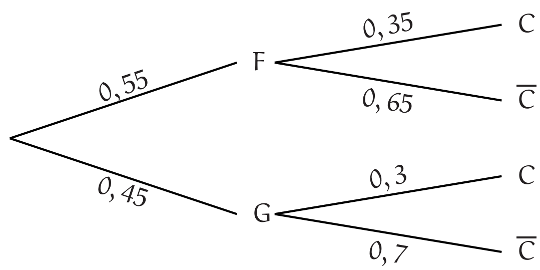
EXERCICE 4

1) On note F l'événement « l'élève choisi est une fille » et G l'événement « l'élève choisi est un garçon » (de sorte que $G = \overline{F}$). Enfin, on note C l'événement « l'élève déjeune à la cantine ». L'énoncé donne $p(F) = 0,55$ et donc $p(G) = 1 - 0,55 = 0,45$ puis $p_F(C) = 0,35$ (et donc $p_F\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,35 = 0,65$) et $p_G(C) = 0,3$ (et donc $p_G\left(\overline{C}\right) = 1 - 0,3 = 0,7$).

Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p\left(\overline{C}\right)$. D'après la formule des probabilités totales,

$$p\left(\overline{C}\right) = p\left(F \cap \overline{C}\right) + p\left(G \cap \overline{C}\right) = p(F) \times p_F\left(\overline{C}\right) + p(G) \times p_G\left(\overline{C}\right) = 0,55 \times 0,65 + 0,45 \times 0,7 = 0,6725$$

La probabilité que l'élève ne déjeune pas à la cantine est $0,6725$.

2) Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne ne comportant aucun numéro pair est encore le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les cinq jetons de l'urne qui portent un numéro impair. Ce nombre est

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10.$$

Le nombre de tirages simultanés de trois jetons parmi les dix jetons de l'urne contenant au moins un numéro pair est la différence des deux nombres précédents c'est-à-dire $120 - 10 = 110$.

Il y a 110 tirages simultanés de 3 jetons comportant au moins un numéro pair.

3) On sait que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 20$,

$$p(Y = k) = \binom{20}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(1 - \frac{1}{5}\right)^{20-k},$$

et donc

$$p(Y \geqslant 2) = 1 - p(Y = 0) - p(Y = 1) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20} - 10 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)^{19} = 0,959\ldots$$

$p(Y \geqslant 2) = 0,959$ à 10^{-3} près par défaut.

4) Posons plus simplement $p(F) = p$. L'énoncé donne $p(A) = 0,02$ et $p(A \cup F) = 0,069$. D'autre part, puisque les événements A et F sont indépendants, $p(A \cap F) = p(A) \times p(F) = 0,02p$.

$$0,069 = p(A \cup F) = p(A) + p(F) - p(A \cap F) = 0,02 + p - 0,02p = 0,02 + 0,98p,$$

et donc

$$p = \frac{0,069 - 0,02}{0,98} = \frac{0,049}{0,98} = \frac{49}{980} = \frac{1}{20} = 0,05.$$

$$\boxed{p(F) = 0,05.}$$

5) Dans cet algorithme, on recommence $n = 9$ fois une même expérience : choisir un nombre au hasard entre 1 et 7. A chaque expérience, on a deux éventualités : « le nombre obtenu est 6 ou 7 (le succès) » avec une probabilité $p = \frac{2}{7}$ ou « ne pas obtenir 6 ou 7 (l'échec) » avec une probabilité $1 - p = \frac{5}{7}$. De plus, au cours des 9 expériences, la probabilité d'obtenir 6 ou 7 ne varie pas en fonction des résultats précédemment obtenus ou encore les 9 expériences sont indépendantes les unes des autres.
La variable C est un compteur : à la fin des neuf expériences, la variable C contient le nombre de fois où on a obtenu un résultat égal à 6 ou 7 ou encore la variable X donne le nombre de succès en 9 tentatives. Finalement,

$$\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètre } n = 9 \text{ et } p = \frac{2}{7}.}$$

