

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation sur \mathbb{R} .

Partie B : recherche d'une tangente

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
2. Démontrer qu'une tangente à \mathcal{C} en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4. Donner une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite Δ . Hachurer le domaine \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ , la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées

2. On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \frac{1}{e}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine \mathcal{D} .

ANNEXE 1
Exercice1
À rendre avec la copie

Courbe \mathcal{C} représentative de f

