# BACCALAUREAT GENERAL

## Session de juin 2012
## MATHEMATIQUES
## - Série S -
## Enseignement Obligatoire
## Antilles Guyane

---

**EXERCICE 1**

**Partie A : étude de la fonction**

**1)** Pour tout réel $x$, $f(x) = xe^{x-1} + 1 = 1 + \dfrac{1}{e} \times xe^{x}$. Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{e} \times 0 = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $-\infty$.

**2)** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x-1} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

**3)** $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel $x$,

$$f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times (x-1)'e^{x-1} + 0 = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

**4)** Pour tout réel $x$, $e^{x-1} > 0$. Par suite, pour tout réel $x$, $f'(x)$ est du signe de $x + 1$. Ainsi, la fonction $f'$ est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et s'annule en $-1$. On en déduit le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $1$ | $\searrow$ | $1 - e^{-2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Partie B : recherche d'une tangente**

**1)** Soit $a > 0$. $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$. Par suite, une équation de la tangente $T_a$ est

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ou encore $y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1$ ou enfin $y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1$.

$$\boxed{\text{Une équation de } T_a \text{ est } y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2e^{a-1}.}$$

**2)** $T_a$ passe par $O(0,0)$ si et seulement $0 = (a+1)e^{a-1} \times 0 + 1 - a^2e^{a-1}$ ou encore $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

**3)** $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$ et donc $1$ est une solution de l'équation $(E)$ : $1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0, +\infty[$. Montrons que $1$ est l'unique solution de $(E)$ sur $]0, +\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$,

$$1 - x^2e^{x-1} = 0 \Leftrightarrow x^2e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^{x-1}} \text{ (car } e^{x-1} \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 = e^{-x+1} \Leftrightarrow x^2 - e^{-x+1} = 0.$$

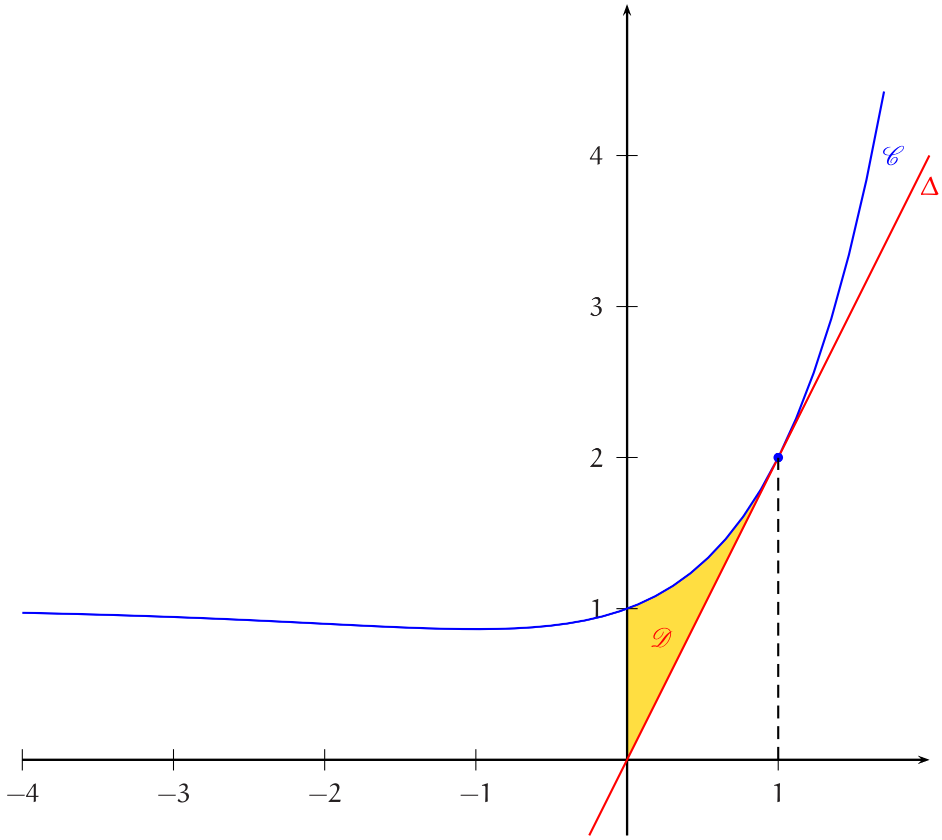
Pour $x > 0$, posons $g(x) = x^2 - e^{-x+1}$. $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + e^{-x+1}$. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x+1} > 0$ et $2x > 0$ et donc $g'(x) > 0$. La fonction $g$ est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour $x \in ]0, 1[$, $g(x) < g(1)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x \in ]1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$ ou encore $g(x) > 0$. En particulier, si $x \in ]0, +\infty[\setminus\{1\}$, $g(x) \neq 0$ puis $1 - x^2e^{x-1} \neq 0$. $1$ est donc l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

**4)** Si $a = 1$, l'équation obtenue à la question 1) s'écrit $y = 2x$.

**Partie C : calcul d'aire**

**1) Graphique**




**2)** Pour $x$ dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour $x$ dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = e^{x-1} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{x-1} \end{array}$$

De plus, les fonctions $u'$ et $v'$ sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^{x-1}\, dx &= \left[xe^{x-1}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^{x-1}\, dx = 1 \times e^0 - 0 \times e^{-1} - \int_0^1 e^{x-1}\, dx \\ &= 1 - \left[e^{x-1}\right]_0^1 = 1 - \left(1 - e^{-1}\right) = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

**3)** La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\Delta$ sur $[0, 1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathscr{D}$ est

$$\begin{aligned} \mathscr{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x)\, dx = \int_0^1 xe^{x-1}\, dx + \int_0^1 (1 - 2x)\, dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{e} + \left[x - x^2\right]_0^1 = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'aire, en unités d'aire, du domaine } \mathscr{D} \text{ est égale à } \frac{1}{e}.}$$