

EXERCICE 1 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

Les parties B et C sont indépendantes.

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : étude de la fonction

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe \mathcal{C} ?
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. On admet que f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = (x + 1)e^{x-1}$.
4. Étudier les variations de f sur \mathbb{R} et dresser son tableau de variation sur \mathbb{R} .

Partie B : recherche d'une tangente

Soit a un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse a , qui passe par l'origine du repère.

1. On appelle T_a la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse a . Donner une équation de T_a .
2. Démontrer qu'une tangente à \mathcal{C} en un point d'abscisse a strictement positive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité

$$1 - a^2e^{a-1} = 0.$$

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de l'équation

$$1 - x^2e^{x-1} = 0.$$

4. Donner une équation de la tangente recherchée.

Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné en **Annexe 1** représente la courbe \mathcal{C} de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

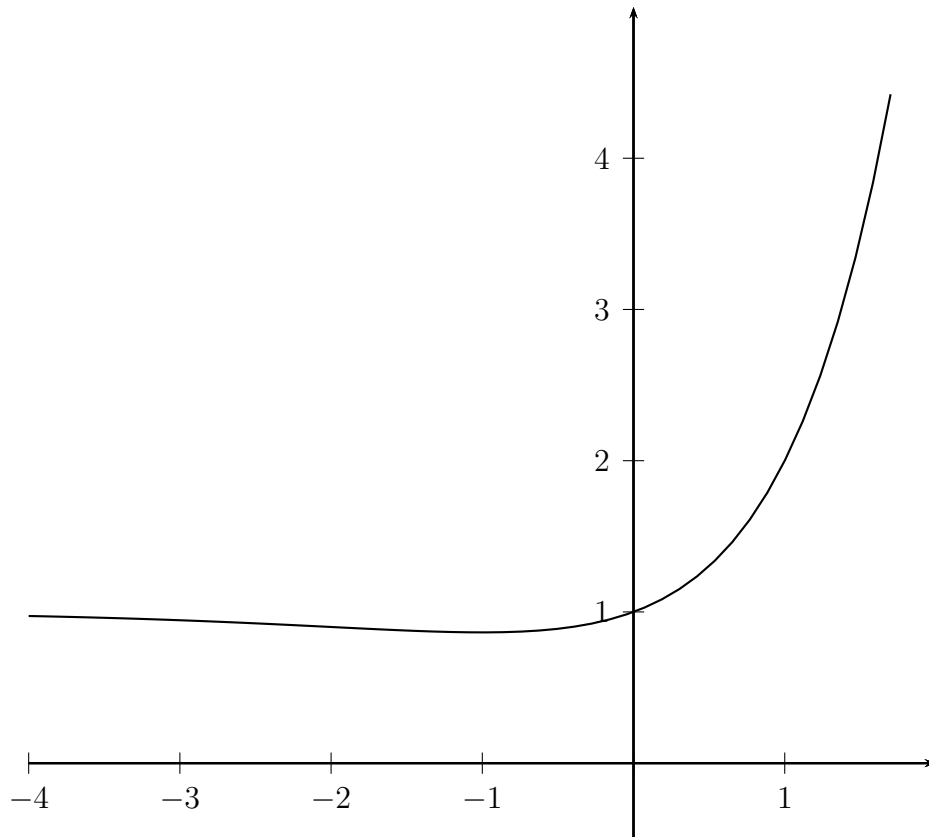
1. Construire sur ce graphique la droite Δ d'équation $y = 2x$. On admet que la courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite Δ . Hachurer le domaine \mathcal{D} limité par la courbe \mathcal{C} , la droite Δ , la droite d'équation $x = 1$ et l'axe des ordonnées

2. On pose $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $I = \frac{1}{e}$.

3. En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine \mathcal{D} .

ANNEXE 1
Exercice1
À rendre avec la copie

Courbe \mathcal{C} représentative de f



BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2012

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

Antilles Guyane

EXERCICE 1

Partie A : étude de la fonction

1) Pour tout réel x , $f(x) = xe^{x-1} + 1 = 1 + \frac{1}{e} \times xe^x$. Un théorème de croissances comparées permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$. Par suite,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \frac{1}{e} \times 0 = 1.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $-\infty$.

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. En multipliant, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{x-1} = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 \times e^{x-1} + x \times (x-1)'e^{x-1} + 0 = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}.$$

4) Pour tout réel x , $e^{x-1} > 0$. Par suite, pour tout réel x , $f'(x)$ est du signe de $x+1$. Ainsi, la fonction f' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$, strictement positive sur $]-1, +\infty[$ et s'annule en -1 . On en déduit le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
f		1	$+\infty$

\swarrow $1 - e^{-2}$ \searrow

Partie B : recherche d'une tangente

1) Soit $a > 0$. $f(a) = ae^{a-1} + 1$ et $f'(a) = (a+1)e^{a-1}$. Par suite, une équation de la tangente T_a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \text{ ou encore } y = (a+1)e^{a-1}(x-a) + ae^{a-1} + 1 \text{ ou enfin } y = (a+1)e^{a-1}x - a^2e^{a-1} + 1.$$

$$\text{Une équation de } T_a \text{ est } y = (a+1)e^{a-1}x + 1 - a^2e^{a-1}.$$

2) T_a passe par $O(0,0)$ si et seulement $0 = (a+1)e^{a-1} \times 0 + 1 - a^2e^{a-1}$ ou encore $1 - a^2e^{a-1} = 0$.

3) $1 - 1^2e^{1-1} = 1 - e^0 = 0$ et donc 1 est une solution de l'équation (E) : $1 - x^2e^{x-1}$ sur $]0, +\infty[$. Montrons que 1 est l'unique solution de (E) sur $]0, +\infty[$.

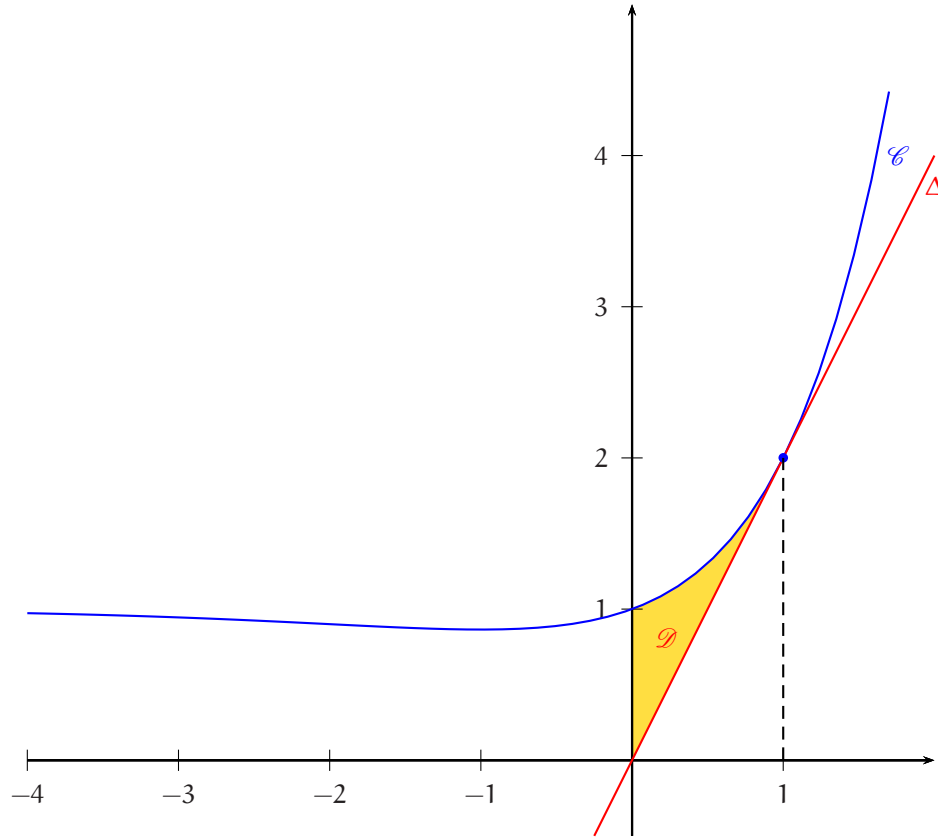
Pour tout réel $x > 0$,

$$\begin{aligned} 1 - x^2e^{x-1} = 0 &\Leftrightarrow x^2e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{e^{x-1}} \text{ (car } e^{x-1} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x^2 = e^{-x+1} \Leftrightarrow x^2 - e^{-x+1} = 0. \end{aligned}$$

Pour $x > 0$, posons $g(x) = x^2 - e^{-x+1}$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + e^{-x+1}$. Pour tout réel $x > 0$, $e^{-x+1} > 0$ et $2x > 0$ et donc $g'(x) > 0$. La fonction g est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour $x \in]0, 1[$, $g(x) < g(1)$ ou encore $g(x) < 0$ et si $x \in]1, +\infty[$, $g(x) > g(1)$ ou encore $g(x) > 0$. En particulier, si $x \in]0, +\infty[\setminus\{1\}$, $g(x) \neq 0$ puis $1 - x^2e^{x-1} \neq 0$. 1 est donc l'unique solution de l'équation $1 - x^2e^{x-1} = 0$.

4) Si $a = 1$, l'équation obtenue à la question 1) s'écrit $y = 2x$.

1) Graphique



2) Pour x dans $[0, 1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^{x-1}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 1]$ et pour x dans $[0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v(x) &= e^{x-1} \\ u'(x) &= 1 & v'(x) &= e^{x-1} \end{aligned}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^{x-1} dx &= [x e^{x-1}]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^{x-1} dx = 1 \times e^0 - 0 \times e^{-1} - \int_0^1 e^{x-1} dx \\ &= 1 - [e^{x-1}]_0^1 = 1 - (1 - e^{-1}) = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

3) La courbe \mathcal{C} est au-dessus de la droite Δ sur $[0, 1]$. Donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} est

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^1 (f(x) - 2x) dx = \int_0^1 x e^{x-1} dx + \int_0^1 (1 - 2x) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \frac{1}{e} + [x - x^2]_0^1 = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

L'aire, en unités d'aire, du domaine \mathcal{D} est égale à $\frac{1}{e}$.