BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement Obligatoire

France métropolitaine

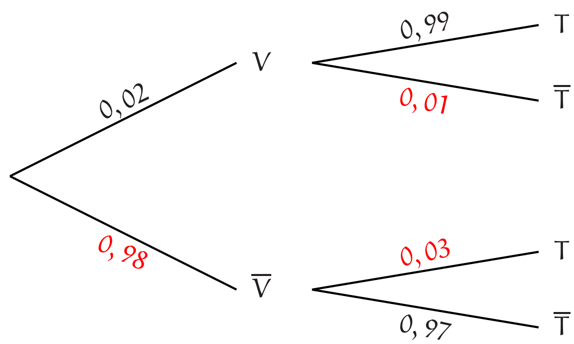
EXERCICE 1

PARTIE A

1) a) L'énoncé fournit directement

$$\boxed{p(V) = 0,02,\ p_V(T) = 0,99 \text{ et } p_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0,97.}$$

Représentons la situation par un arbre.



b) On en déduit que $p\,(V \cap T) = p(V) \times p_V(T) = 0,02 \times 0,99 = 0,0198$.

$$\boxed{p\,(V \cap T) = 0,0198.}$$

2) La probabilité demandée est $p(T)$. D'après la formule des probabilités totales, $p(T) = p(T \cap V) + p(T \cap \overline{V})$. D'après la question précédente, $p\,(V \cap T) = 0,0198$ et d'autre part

$$p(T \cap \overline{V}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(T) = (1 - p(V))(1 - p_{\overline{V}}(\overline{T})) = (1 - 0,02)(1 - 0,97) = 0,98 \times 0,03 = 0,0294,$$

et donc $p(T) = 0,0198 + 0,0294 = 0,0492$.

$$\boxed{p\,(T) = 0,0492.}$$

3) a) La probabilité demandée est $p_T(V)$. Or,

$$p_T(V) = \frac{p(V \cap T)}{p(T)} = \frac{0,0198}{0,0492} = 0,402\ldots$$

Donc $p_T(V) = 0,4$ à 10^{-2} près ou encore $p_T(V) = 40\%$ à 1% près ce qui justifie la phrase de l'énoncé.

b) La probabilité demandée est $p_{\overline{T}}(\overline{V})$. Or,

$$p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \frac{p(\overline{V} \cap \overline{T})}{p(\overline{T})}.$$

Ensuite, d'après la question 2), $p(\overline{T}) = 1 - p(T) = 1 - 0,0492 = 0,9508$ et d'autre part

$$p(\overline{V} \cap \overline{T}) = p(\overline{V}) \times p_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0,98 \times 0,97 = 0,9506$$

puis $p_{\overline{T}}(\overline{V}) = \dfrac{0,9506}{0,9508} = 0,9998$ arrondi à 10^{-4}.

$$\boxed{p_{\overline{T}}(\overline{V}) = 0,9998 \text{ arrondi à } 10^{-4}.}$$

PARTIE B

1) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,
- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la personne est contaminée par le virus » avec une probabilité $p = 0,02$ ou « la personne n'est pas contaminée par le virus » avec une probabilité $1 - p = 0,98$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,02$.

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 2)$. Or,

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 2) &= 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \times 0,02^0 \times 0,98^{10} - \binom{10}{0} \times 0,02^1 \times 0,98^9 \\ &= 1 - 0,98^{10} - 10 \times 0,02 \times 0,98^9 = 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-4}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'au moins deux personnes soient contaminées est } 0,0162 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

EXERCICE 2

1. **Réponse 2**

2. **Réponses 1 et 4**

3. **Réponse 2**

4. **Réponse 3**

Explication 1.

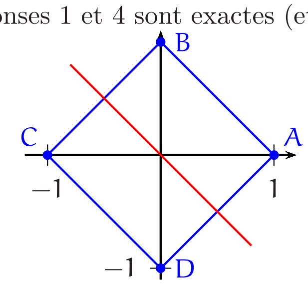
$$z_E = z_A + e^{i\pi/3}(z_D - z_A) = 1 + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1) = 1 - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i).$$

La bonne réponse est la deuxième.

Explication 2. (Erreur d'énoncé car deux des réponses sont exactes).
Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z.

$$|z+i| = |z-1| \Leftrightarrow |z - z_D| = |z - z_A| \Leftrightarrow MD = MA \Leftrightarrow M \in \text{med}[AD].$$

Donc l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AD]$. Malheureusement, la médiatrice du segment $[AD]$ est aussi la médiatrice du segment $[BC]$ et donc les réponses 1 et 4 sont exactes (et les réponses 2 et 3 sont fausses).



Explication 3. On note (E) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $\dfrac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur.
Le point D est élément de (E) car $\dfrac{z_D+i}{z_D+1} = \dfrac{-i+i}{-i+1} = 0$ qui est bien un imaginaire pur. Le point C n'est pas un élément de (E) car $z_C + 1 = 0$ et donc $\dfrac{z_C+i}{z_C+1}$ n'existe pas.

Soit M un point du plan distinct de C et D dont l'affixe est notée z.

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \frac{z+i}{z+1} \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{z-z_D}{z-z_C} \text{ imaginaire pur} \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_D}{z-z_C}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle de diamètre } [CD] \text{ privé des points } C \text{ et } D.
\end{aligned}$$

En récupérant le point D, on a montré que (E) est le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C. La bonne réponse est la réponse 2.

Explication 4. On note (E) l'ensemble considéré. Le point B d'affixe i n'appartient pas à (E) car 0 n'a pas d'argument. Soit M un point du plan d'affixe $z \neq i$.

$$\begin{aligned}
M \in (E) &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } \arg(z-i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}\right) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
&\Leftrightarrow \text{les vecteurs } \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont colinéaires et de même sens} \Leftrightarrow M \in]BD).
\end{aligned}$$

Donc (E) est la demi-droite d'origine B passant par D et privée du point B. La bonne réponse est la troisième.

EXERCICE 3

PARTIE A

1) a) Pour tout réel x, $f_1(x) = xe^{-x}$.

Limite de f_1 en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Limite de f_1 en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f_1(x) = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

b) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Par suite, la fonction f_1' est strictement positive sur $]-\infty, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$ puis la fonction f_1 est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

c) La courbe $\mathscr{C}_1$ admet une tangente parallèle à (Ox) en son point d'abscisse 1. La tangente T_k n'est pas parallèle à (Ox). L'entier k n'est donc pas égal à 1 ou encore l'entier k est supérieur ou égal à 2.

2) a) Si un point M appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, alors M appartient aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et donc son abscisse x est solution de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\Leftrightarrow xe^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x(1-x)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées respectives $(0,0)$ (car $f_1(0) = 0$) et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ (car $f_1(1) = \dfrac{1}{e}$). Les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, ont donc au plus deux points en commun.

Réciproquement, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$ et donc le point $O(0,0)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.
De même, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C}_n,\ n \geqslant 1, \text{ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées } (0,0) \text{ et } \left(1, \frac{1}{e}\right).}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-1)e^{-x} = nx^{n-1}e^{-x} - x^ne^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

3) En particulier, pour tout réel x, $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$. Donc, la fonction f_3' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]0, 3[$ et strictement négative sur $]3, +\infty[$ puis la fonction f_3 est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$ et strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. La fonction f_3 admet donc un maximum atteint en $x = 3$.

4) a) Soit $k \geqslant 2$. Une équation de T_k est $y = f_k(1) + f_k'(1)(x-1)$ avec $f_k(1) = e^{-1}$ et $f_k'(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = (k-1)e^{-1}$.

Une équation de T_k est donc $y = e^{-1} + (k-1)e^{-1}(x-1)$ ou encore $y = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{2-k}{e}$. Ensuite,

$$\frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}((k-1)x - (k-2)) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x - (k-2) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x = k-2 \Leftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}.$$

Donc la tangente T_k coupe l'axe des abscisses au point A_k de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}, 0\right)$.

b) Soit $k \geqslant 2$.

$$A_k = A \Leftrightarrow \frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1) \Leftrightarrow 5k - 4k = 10 - 4 \Leftrightarrow k = 6.$$

$$\boxed{k = 6.}$$

PARTIE B

1) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$\begin{array}{cc} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1(-e^{-x})\,dx \\ &= (-e^{-1}) - (0) + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 \\ &= 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}.}$$

2) a) Puisque chaque fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C}_n)$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. D'après le graphique, il semblerait que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ soit décroissante.

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x})\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n \geqslant 0$, $x - 1 \leqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n(x-1)e^{-x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \leqslant 0$ ou encore que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

c) D'autre part, chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est positive sur $[0,1]$ et donc, par positivité de l'intégrale, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n \geqslant 0$.

En résumé, la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

d) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x de $[0,1]$, $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n \times 1$. Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx \leqslant \int_0^1 x^n\, dx$$

avec $\displaystyle\int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

EXERCICE 4

Partie A - Restitution organisée de connaissances

1) Puisque H est le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan $\mathscr{P}$ et que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$, les vecteurs $\overrightarrow{M_0H}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires. Par suite,

$$\left|\overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left\|\overrightarrow{n}\right\| \left\|\overrightarrow{M_0H}\right\| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

2) Puisque le point H appartient au plan $\mathscr{P}$, on a $ax_H + by_H + cz_H + d = 0$ et donc $ax_H + by_H + cz_H = -d$ puis

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n}.\overrightarrow{M_0H} &= a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 + ax_H + by_H + cz_H \\ &= -ax_0 - by_0 - cz_0 - d.\end{aligned}$$

3) D'après les deux questions précédentes, $|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = d\left(M_0, \mathscr{P}\right)\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et, puisque

$$|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d| = |-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)| = |ax_0 + by_0 + cz_0 + d|,$$

on a montré que

$$\boxed{d\left(M_0, \mathscr{P}\right) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.}$$

Partie B

1) a) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(-7, 1-5)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sont $(-3, 2, 1)$. S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, on a d'une part $-3 = -7k$ et donc $k = \dfrac{3}{7}$ et d'autre part, $2 = 1 \times k$ et donc $k = 2$. Ceci est impossible et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Par suite, les point A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.

On note $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $x + 2y - z - 1 = 0$.

- $x_A + 2y_A - z_A - 1 = 4 + 2 - 5 - 1 = 0$. Donc A appartient à $\mathscr{P}'$.
- $x_B + 2y_B - z_B - 1 = -3 + 4 - 0 - 1 = 0$. Donc B appartient à $\mathscr{P}'$.
- $x_C + 2y_C - z_C - 1 = 1 + 6 - 6 - 1 = 0$. Donc C appartient à $\mathscr{P}'$.

On en déduit que le plan (ABC) est le plan $\mathscr{P}'$ ou encore qu'une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est $x + 2y - z - 1 = 0$.

b) $d = \dfrac{|x_F + 2y_F - z_F - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{|-7 + 0 - 4 - 1|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = \dfrac{2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$

$$\boxed{d = 2\sqrt{6}.}$$

2) a) Δ est la droite passant par $F(-7, 0, 4)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1, 2, -1)$. Donc, une représentation paramétrique de Δ est

$$\left\{\begin{array}{l} x = -7 + t \\ y = 2t \\ z = 4 - t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

b) Le point H est l'intersection de Δ et de $\mathscr{P}$. Soit $M(-7 + t, 2t, 4 - t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de Δ.

$$M \in \mathscr{P} \Leftrightarrow (-7 + t) + 2(2t) - (4 - t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Pour $t = 2$, on obtient les coordonnées du point H : $(-5, 4, 2)$.

$$\boxed{\text{Le point H a pour coordonnées } (-5, 4, 2).}$$

c) $d\left(F, \mathscr{P}\right) = FH = \sqrt{(-5 - (-7))^2 + (4 - 0)^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. On retrouve ainsi le résultat de la question 2)b).

3) a) $FB^2 = (x_B - x_F)^2 + (y_B - y_F)^2 + (z_B - z_F)^2 = (-3 - (-7))^2 + (2 - 0)^2 + (0 - 4)^2 = 16 + 4 + 16 = 36$ et donc $FB = 6$.

$$\boxed{\text{Le point B appartient à } \mathscr{S}.}$$

b) On note R le rayon de $\mathscr{S}$ (donc $R = 6$). Puisque $d = 2\sqrt{6} = 4,8\ldots$, on a $d < R$ et on sait que l'intersection de $\mathscr{S}$ et de $\mathscr{P}$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{36 - 24} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Le centre de $\mathscr{C}$ est le projeté orthogonal du centre F de la sphère $\mathscr{S}$ sur le plan $\mathscr{P}$. C'est le point $H(-5, 4, 2)$ déterminé à la question 2)b).

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est un cercle de rayon } 2\sqrt{3} \text{ et de centre } H(-5, 4, 2).}$$

