BACCALAUREAT GENERAL

Session de juin 2011
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement Obligatoire
Rochambeau

EXERCICE 1

Partie A

1) L'expression complexe de r_A est $z' = a + e^{i\pi/2}(z - a) = i + i(z - i) = iz + 1 + i$. Donc

$$d = ic + 1 + i = i(3i) + 1 + i = -3 + 1 + i = -2 + i.$$

$$\boxed{d = -2 + i.}$$

2) De même, l'expression complexe de r_B est $z' = b + e^{i\pi/2}(z - b) = 1 + i + i(z - 1 - i) = iz + 1 + i - i + 1 = iz + 2$ et l'expression complexe de r_O est $z' = e^{-i\pi/2}z = -iz$. Donc

$$g = id + 2 = i(-2 + i) + 2 = -2i - 1 + 2 = 1 - 2i \text{ et } h = -ic = -i(3i) = 3.$$

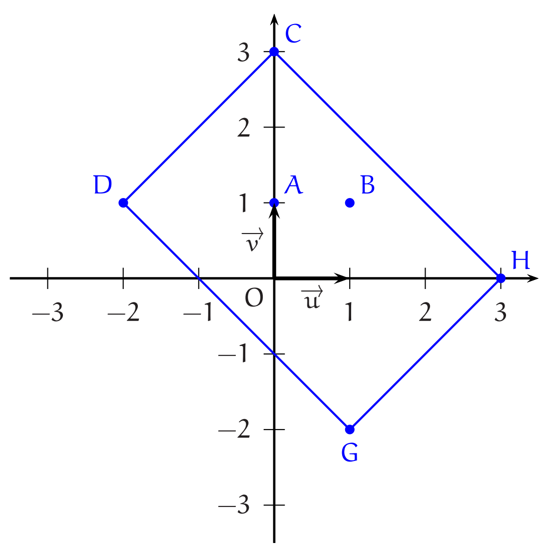
$$\boxed{g = 1 - 2i \text{ et } h = 3.}$$

3) Les coordonnées des points C, D, G et H sont : $C(0, 3)$, $D(-2, 1)$, $G(1, -2)$ et $H(3, 0)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DC}$ sont $(2, 2)$ et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{GH}$ sont $(2, 2)$. Donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{GH}$ et par suite le quadrilatère CDGH est un parallélogramme. De plus, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DG}$ sont $(3, -3)$ et donc

$$\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DG} = 2 \times 3 + 2 \times (-3) = 0.$$

On en déduit que $(DC) \perp (DG)$. Ainsi, le parallélogramme CDGH possède un angle droit et on a montré que

$$\boxed{\text{le quadrilatère CDGH est un rectangle.}}$$



Partie B

1) D'après la question 1 de la partie A, l'écriture complexe de la rotation r_A est $z' = iz + 1 + i$ et donc $n = im + 1 + i$.

2) $n-m = im+1+i-m = (-1+i)m+1+i$ et $p-q = -m+1+i+im = (-1+i)m+1+i$. Donc $n-m = p-q$ ou encore $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Par suite,

$$\boxed{\text{le quadrilatère } MNPQ \text{ est un parallélogramme.}}$$

3) a) $p-n = -m+1+i-im-1-i = -(1+i)m \neq 0$ (car $M \neq O$ et donc $m \neq 0$) puis $m-n = m-im-1-i = (1-i)m-(1+i)$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{m-n}{p-n} &= \frac{(1-i)m-(1+i)}{-(1+i)m} = \frac{(1-i)m}{-(1+i)m} + \frac{-(1+i)}{-(1+i)m} = -\frac{1-i}{1+i} + \frac{1}{m} \\ &= -\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + \frac{1}{m} = -\frac{1-2i-1}{1^2+1^2} + \frac{1}{m} = -\frac{-2i}{2} + \frac{1}{m} = i + \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

b) On note tout d'abord que $m-n = 0 \Leftrightarrow i + \dfrac{1}{m} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m} = -i \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{i} \Leftrightarrow m = i \Leftrightarrow M = A$. Comme $M \neq A$, on a donc $m-n \neq 0$ ou encore $M \neq N$. Ensuite,

$$\left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \arg\left(\frac{m-n}{p-n}\right) = \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) \ [2\pi].$$

Soit m un nombre complexe tel que $m \neq 0$ et $m \neq a$,

$$\begin{aligned} MNPQ \text{ est un rectangle} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NP}, \overrightarrow{NM}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \Leftrightarrow \arg\left(i + \frac{1}{m}\right) = \frac{\pi}{2} \ [\pi] \\ &\Leftrightarrow i + \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \frac{1}{m} \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow \frac{\overline{m}}{|m|^2} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{m} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow m \text{ est imaginaire pur} \\ &\Leftrightarrow M \in (Oy). \end{aligned}$$

Donc, l'ensemble des points M distincts de O et A tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle est l'axe (Oy) privé des points O et A.

EXERCICE 2

Partie A

Il y a $\dbinom{25}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi 25 et $\dbinom{3}{2}$ choix de deux ordinateurs parmi les trois défectueux. La probabilité demandée est donc

$$p = \frac{\dbinom{3}{2}}{\dbinom{25}{2}} = \frac{\dfrac{3\times 2}{2}}{\dfrac{25\times 24}{2}} = \frac{3\times 2}{25\times 24} = \frac{1}{25\times 4} = \frac{1}{100}.$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.
$p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis $p(X > t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

avec $\dfrac{1}{5}\ln\left(\dfrac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

2) $p_{X>3}(X > 5) = \dfrac{p((X > 5)\cap(X > 3))}{p(X > 3)} = \dfrac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \dfrac{e^{-5\times 0,18}}{e^{-3\times 0,18}} = \dfrac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} = 0,698$ à 10^{-3} près.

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0,4)^0(0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geqslant 0,6^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geqslant \ln(0,6^n) \text{ (par croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,6) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 13,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à $0,999$ est 14.

EXERCICE 3

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Puisque $a+b+c \neq 0$, on peut définir G le barycentre du système $\{A(a), B(b), C(c)\}$. Pour tout point M de l'espace, on a : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MG}$ et donc

$$\left\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right\| = k \Leftrightarrow \left\|(a+b+c)\overrightarrow{MG}\right\| = k \Leftrightarrow |a+b+c|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = k \Leftrightarrow MG = \frac{k}{|a+b+c|}$$
$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la sphère de centre } G \text{ et de rayon } \frac{k}{|a+b+c|}.$$

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}\right\| = k$ est la sphère de centre $G = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ et de rayon $\dfrac{k}{|a+b+c|}$.

Partie B

1) Les points B, C et E ne sont pas alignés ou encore, les droites (BC) et (BE) sont deux droites sécantes du plan (BCE). Ensuite, dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, on a $B(1,0,0)$ (car $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$), $C(1,1,0)$ (car $\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD} + 0.\overrightarrow{AE}$) et $E(0,0,1)$ (car $\overrightarrow{AE} = 0.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD} + 1.\overrightarrow{AE}$).
Donc le vecteur $\overrightarrow{BC}$ a pour coordonnées $(0,1,0)$ et le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1,0,1)$. Ensuite,

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n} = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0,$$

et

$$\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{n} = (-1) \times 1 + 0 \times 0 + 1 \times 1 = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc orthogonal aux droites (BC) et (BE) qui sont deux droites sécantes du plan (BCE) et finalement

$\boxed{\text{le vecteur } \overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan } (BCE).}$

2) Soit $M(x,y,z)$ un point de l'espace.

$$M \in (BCE) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 0 \times (y-0) + 1 \times (z-0) = 0 \Leftrightarrow x+z = 1.$$

$\boxed{\text{Une équation du plan } (BCE) \text{ est } x+z=1.}$

3) (Δ) est la droite passant par $E(0,0,1)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{n}(1,0,1)$. Donc,

$$\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } (\Delta) \text{ est donc } \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t+1 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.}$$

4) On sait qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $z = 0$ (premier plan de coordonnées).
Soit $M(t, 0, t+1)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (Δ).

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow t+1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Pour $t = -1$, on obtient le point R de coordonnées $(-1,0,0)$.

Les coordonnées du milieu du segment [RB] sont $\left(\dfrac{x_R+x_B}{2}, \dfrac{y_R+y_B}{2}, \dfrac{z_R+z_B}{2}\right)$ ou encore $(0,0,0)$. Le milieu du segment [BR] est donc le point A ou encore

$\boxed{\text{le point } R \text{ est le symétrique du point B par rapport au point } A.}$

5) a) Soit $D' = \text{bar}(R(1), B(-1), C(2))$. On a $R(-1,0,0)$, $B(1,0,0)$ et $C(1,1,0)$. Donc

- $x_{D'} = \dfrac{x_R - x_B + 2x_C}{1-1+2} = \dfrac{-1-1+2}{2} = 0$.
- $y_{D'} = \dfrac{y_R - y_B + 2y_C}{1-1+2} = \dfrac{0-0+2}{2} = 1$.
- $z_{D'} = \dfrac{z_R - z_B + 2z_C}{1-1+2} = \dfrac{0-0+0}{2} = 0$.

Le point D' a pour coordonnées $(0,1,0)$ ou encore $D' = D$. Donc

$$\boxed{D = \text{bar}\{R(1), B(-1), C(2)\}.}$$

b) D'après la partie A, (S) est la sphère de centre D et de rayon $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{|1-1+2|} = \sqrt{2}$.

c) Le triangle ABD est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Donc $B \in (S)$.
Le triangle ADE est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Donc $E \in (S)$.
Le triangle DCG est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore, $DG = \sqrt{CD^2 + CG^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. Donc $G \in (S)$.

d) On sait que l'intersection d'une sphère et d'un plan est soit vide, soit un point, soit un cercle (de rayon strictement positif). Ici, le plan (BCE) et la sphère (S) ont en commun les deux points distincts B et E. Donc $(S) \cap (BCE)$ est un cercle.

La distance du centre $D(0,1,0)$ de la sphère (S) au plan (BCE) d'équation $x + z - 1 = 0$ est

$$d = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Si on note r le rayon du cercle $(S) \cap (BCE)$ et R le rayon de la sphère (S), le théorème de Pythagore permet d'affirmer que

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\boxed{(S) \cap (BCE) \text{ est un cercle de rayon } \sqrt{\frac{3}{2}}.}$$

EXERCICE 4

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel x de $[0, +\infty[$

$$g'(x) = e^x - 1.$$

Par suite, $g'(0) = e^0 - 1 = 0$ et si $x > 0$, $g'(x) > 0$ car $e^x > 1$. En résumé, la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

2) Puisque $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, pour tout $x > 0$, $g(x) > g(0) = 0$. Donc la fonction g s'annule en 0 et est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ou encore $e^x - x - 1 \geqslant 0$. Mais alors, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x - x \geqslant 1$ et en particulier,

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ e^x - x > 0.}$$

Partie B

1) Soit $x \in [0, 1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$, (résultat admis par l'énoncé), on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ ou encore $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0, 1],\ f(x) \in [0, 1].}$$

2) a) Soit $x \in [0, 1]$.

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{e^x(1 - x) - (1 - x^2)}{e^x - x} = \frac{(1 - x)(e^x - (1 + x))}{e^x - x} = \frac{(1 - x)g(x)}{e^x - x}.$$

b) Pour tout $x \in]0, 1[$, $g(x) > 0$ (d'après la partie A), $1 - x > 0$ et $e^x - x > 0$ (d'après la partie A). Donc, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) - x > 0$. D'autre part $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc la droite (D) est strictement au-dessous de la courbe (C) sur $]0, 1[$ et la droite (D) et la courbe (C) se coupent aux points de coordonnées $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

3) a) La fonction f est continue sur $[0, 1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, 1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Donc la fonction f admet des primitives sur $[0, 1]$.
On remarque que $(e^x - x)' = e^x - 1$ et puisque pour tout $x \in [0, 1]$, $e^x - x > 0$,

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0, 1] \text{ est la fonction } F\ :\ x \mapsto \ln(e^x - x).}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré par l'énoncé. Puisque la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0, 1]$,

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - x)\ dx = \left[F(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\ln(e^1 - 1) - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln(e^0 - 0) - 0\right) = \ln(e - 1) - \frac{1}{2}.$$

Partie C

1) Voir graphique page suivante.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

- $u_0 = \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Puisque la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ (résultat admis par l'énoncé), on en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ ou encore que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Maintenant, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} = 0,56\ldots \geqslant 0,5$ et finalement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La question 2.b) de la partie B permet d'affirmer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geqslant x$. Puisque $u_n \in [0, 1]$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

3) Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$). Puisque l'application f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc en ℓ, on a

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

D'après la question 2.b) de la partie B, il existe un et un seul réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que $f(x) = x$ à savoir $x = 1$ et donc $\ell = 1$.

On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$