

EXERCICE 4 (6 points)

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
3. En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormal est donnée en annexe, page 6.

Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

On admet que f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

1. Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
 - a) Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
 - b) Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0, 1]$.
3. a) Déterminer une primitive de f sur $[0, 1]$.
 - b) Calculer l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

ANNEXE

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

EXERCICE 4

