EXERCICE 4

Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x de $[0,+\infty[$

$$g'(x) = e^x - 1.$$

Par suite, $g'(0) = e^0 - 1 = 0$ et si $x > 0$, $g'(x) > 0$ car $e^x > 1$. En résumé, la fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et sa dérivée est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) Puisque $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$ et puisque la fonction g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, pour tout $x > 0$, $g(x) > g(0) = 0$. Donc la fonction g s'annule en 0 et est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

3) Pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ou encore $e^x - x - 1 \geqslant 0$. Mais alors, pour tout $x \geqslant 0$, $e^x - x \geqslant 1$ et en particulier,

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ e^x - x > 0.}$$

Partie B

1) Soit $x \in [0,1]$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$, (résultat admis par l'énoncé), on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$ ou encore $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0,1],\ f(x) \in [0,1].}$$

2) a) Soit $x \in [0,1]$.

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{e^x(1-x) - (1-x^2)}{e^x - x} = \frac{(1-x)(e^x - (1+x))}{e^x - x} = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}.$$

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) > 0$ (d'après la partie A), $1 - x > 0$ et $e^x - x > 0$ (d'après la partie A). Donc, pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) - x > 0$. D'autre part $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Donc la droite (D) est strictement au-dessous de la courbe (C) sur $]0,1[$ et la droite (D) et la courbe (C) se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

3) a) La fonction f est continue sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc la fonction f admet des primitives sur $[0,1]$.
On remarque que $(e^x - x)' = e^x - 1$ et puisque pour tout $x \in [0,1]$, $e^x - x > 0$,

$$\boxed{\text{une primitive de } f \text{ sur } [0,1] \text{ est la fonction } F\ :\ x \mapsto \ln(e^x - x).}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine considéré par l'énoncé. Puisque la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $[0,1]$,

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x) - x)\,dx = \left[F(x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\ln(e^1 - 1) - \frac{1}{2}\right) - \left(\ln(e^0 - 0) - 0\right) = \ln(e-1) - \frac{1}{2}.$$

Partie C

1) Voir graphique page suivante.

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

- $u_0 = \frac{1}{2}$ et donc $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant 1$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Puisque la fonction f est croissante sur $[0,1]$ (résultat admis par l'énoncé), on en déduit que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$ ou encore que $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$. Maintenant, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{0,5} - 1}{e^{0,5} - 0,5} = 0,56\ldots \geqslant 0,5$ et finalement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La question 2.b) de la partie B permet d'affirmer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) \geqslant x$. Puisque $u_n \in [0,1]$, on a donc $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

3) Ainsi, la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par 1. On en déduit que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$). Puisque l'application f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc en ℓ, on a

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n \to +\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

D'après la question 2.b) de la partie B, il existe un et un seul réel $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tel que $f(x) = x$ à savoir $x = 1$ et donc $\ell = 1$.
On a montré que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$