Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x+\mathrm{e}^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ à termes positifs définie par :

$u_1=0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=f(u_n)=u_n+\mathrm{e}^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x)\leqslant x$.
   On pourra étudier la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=x-\ln(1+x)$.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1)\leqslant \ln(n)+\dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln(n))=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$.
4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n)\leqslant u_n$.
5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}$.

6. a) Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k}\leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

   b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n\leqslant 1+\ln(n-1)$.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n)\leqslant u_n\leqslant 1+\ln(n-1)$.
   Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1.