EXERCICE 4

Partie A

1) La fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0,+\infty[$ et pour tout réel x positif,

$$f'(x) = 1 + (-1)e^{-x} = 1 - e^{-x}.$$

Soit $x > 0$. Alors, $-x < 0$ puis $e^{-x} < 1$ et donc $1 - e^{-x} > 0$. Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

Partie B

1) La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

La fonction g' est positive sur $[0,+\infty[$ est donc la fonction g est croissante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on en déduit que pour $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ ou encore $\ln(1+x) \leqslant x$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \geqslant 0,\ \ln(1+x) \leqslant x.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. On applique l'inégalité précédente au réel positif $x = \frac{1}{n}$. On obtient $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ ou encore $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$ ou enfin $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}.}$$

3) Soit n un entier naturel non nul.

$$f(\ln(n)) = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}.$$

4) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\ln(n) \leqslant u_n$.
- Pour $n = 1$, $u_1 = 0$ et $\ln(1) = 0$. Donc $\ln(1) \leqslant u_1$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\ln(n) \leqslant u_n$. Puisque $\ln(n) \geqslant 0$ et que f est croissante sur $[0,+\infty[$, on en déduit que $f(\ln(n)) \leqslant f(u_n)$ ou encore, d'après la question précédente, $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$.

Mais d'après la question 2), $\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n}$. On en déduit que $\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel non nul } n,\ \ln(n) \leqslant u_n.}$$

5) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

6) a) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Donc $k - 1 \geqslant 1$.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0,+\infty[$ et donc sur $[k-1,k]$. Pour tout réel x de $[k-1,k]$, on a $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k}$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k}\,dx = \frac{1}{k}(k-(k-1)) = \frac{1}{k}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } k \geqslant 2,\ \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\,dx.}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. D'après la relation de Chasles et l'inégalité admise par l'énoncé,

$$\begin{aligned} u_n &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} \\ &\leqslant 1 + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\,dx + \ldots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x}\,dx \\ &= 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{x}\,dx = 1 + [\ln(x)]_1^{n-1} = 1 + \ln(n-1) - \ln(1) = 1 + \ln(n-1). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1 + \ln(n-1).}$$

7) Soit $n \geqslant 2$. Donc $\ln(n) > 0$. En divisant les différents membres de l'encadrement précédent par $\ln(n)$, on obtient

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + \frac{\ln(n-1)}{\ln(n)} \quad (*).$$

Ensuite, $\dfrac{\ln(n-1)}{\ln(n)} = \dfrac{\ln(n) + \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. Donc, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

$$1 \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$. Ensuite, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$. Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{\ln(n)} + \dfrac{1}{\ln(n)} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = 1$. D'après le théorème des gendarmes et l'encadrement $(*)$, on peut affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln(n)} = 1.}$$