

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

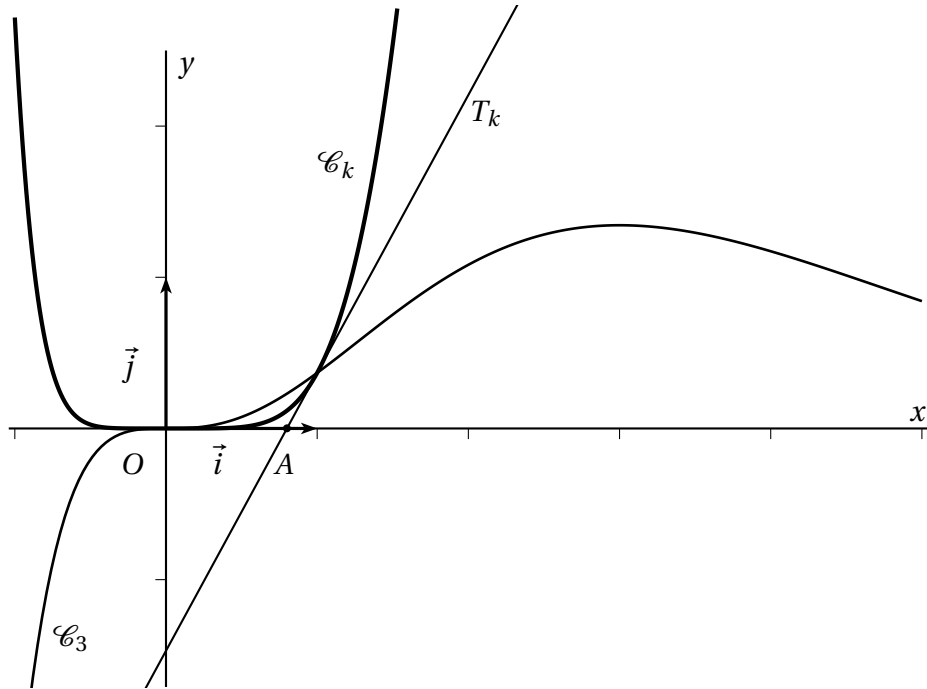
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe \mathcal{C}_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe \mathcal{C}_3 .

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(\frac{4}{5}, 0)$.



1.
 - a. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .
 - c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2.
 - a. Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
 - b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x ,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$. Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4.
 - a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$.
 - b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k .

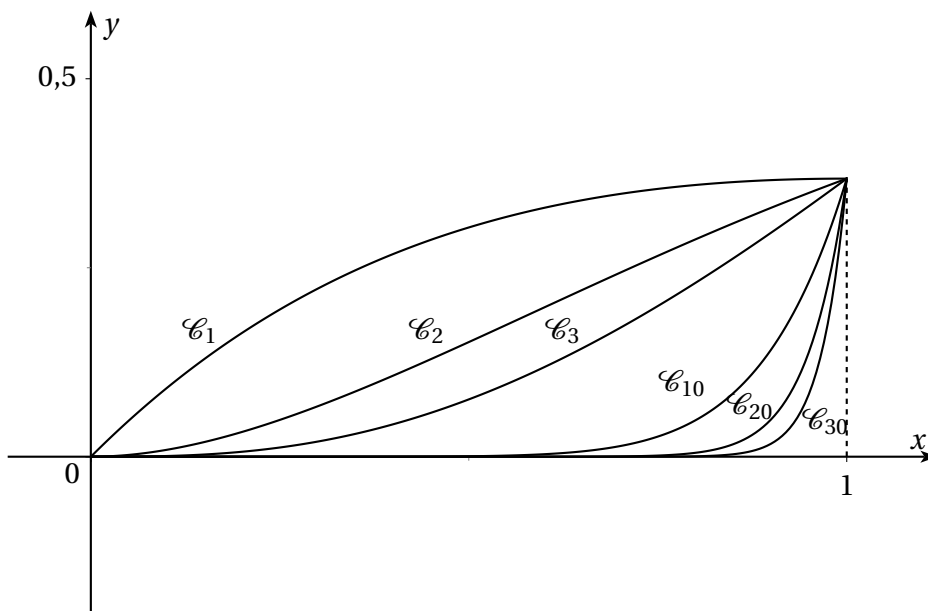
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



- a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
- b. Démontrer cette conjecture.
- c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.