EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

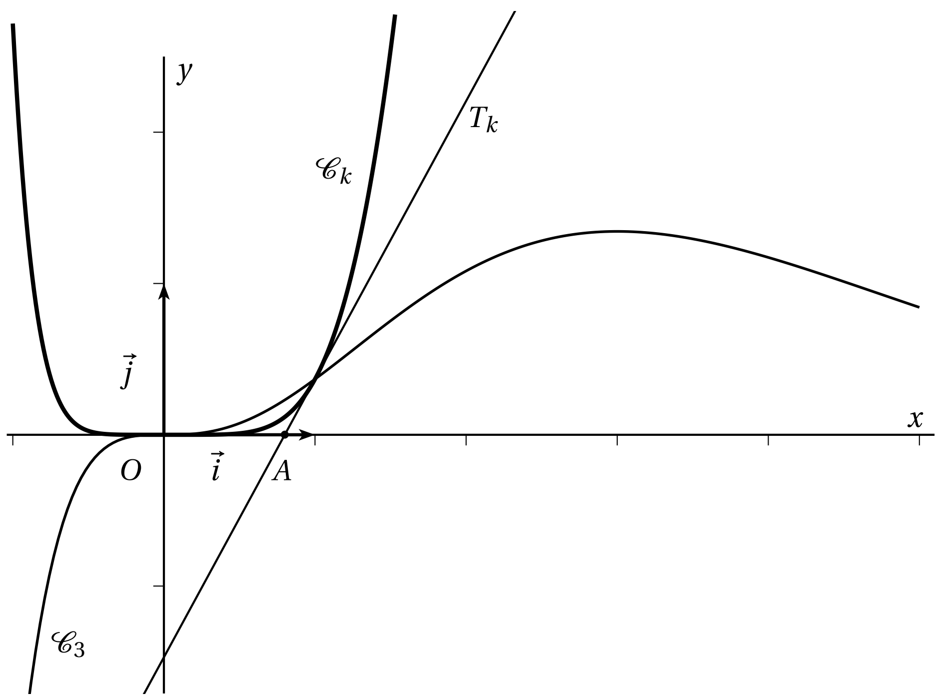
$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O\,;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe $\mathscr{C}_k$ où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe $\mathscr{C}_3$.

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5},\ 0\right)$.



1. **a.** Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b. Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
   c. À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
2. **a.** Démontrer que pour $n \geqslant 1$, toutes les courbes $\mathscr{C}_n$ passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
   b. Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

4. **a.** Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1},\ 0\right)$.

b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

PARTIE B

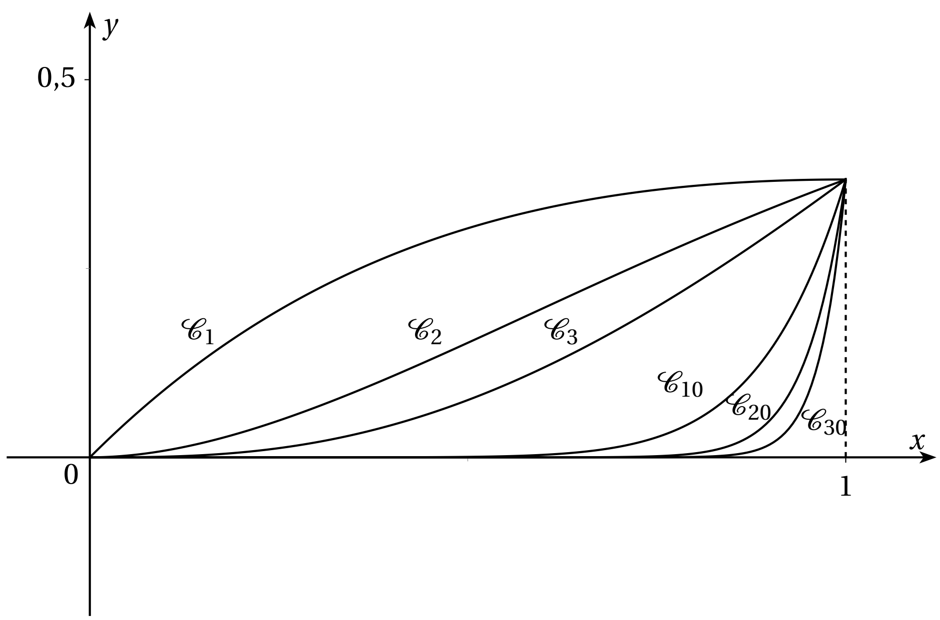
On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}\,dx.$$

1. Calculer I_1.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, $\mathscr{C}_{10}$, $\mathscr{C}_{20}$, $\mathscr{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leqslant x \leqslant 1$.



a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

d. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

EXERCICE 3

PARTIE A

1) a) Pour tout réel x, $f_1(x) = xe^{-x}$.

Limite de f_1 en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$.

Limite de f_1 en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f_1(x) = \dfrac{x}{e^x} = \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0.}$$

b) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_1'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. Par suite, la fonction f_1' est strictement positive sur $]-\infty, 1[$ et strictement négative sur $]1, +\infty[$ puis la fonction f_1 est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

c) La courbe $\mathscr{C}_1$ admet une tangente parallèle à (Ox) en son point d'abscisse 1. La tangente T_k n'est pas parallèle à (Ox). L'entier k n'est donc pas égal à 1 ou encore l'entier k est supérieur ou égal à 2.

2) a) Si un point M appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, alors M appartient aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et donc son abscisse x est solution de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\Leftrightarrow xe^{-x} = x^2e^{-x} \Leftrightarrow xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x(1-x)e^{-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \text{ (car } e^{-x} \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées respectives $(0, 0)$ (car $f_1(0) = 0$) et $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ (car $f_1(1) = \dfrac{1}{e}$). Les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$, ont donc au plus deux points en commun.

Réciproquement, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(0) = 0^n e^{-0} = 0$ et donc le point $O(0, 0)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.
De même, pour tout entier naturel non nul n, $f_n(1) = 1^n \times e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et donc le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e}\right)$ appartient à toutes les courbes $\mathscr{C}_n$, $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Les courbes } \mathscr{C}_n,\ n \geqslant 1, \text{ ont exactement deux points communs, les points de coordonnées } (0,0) \text{ et } \left(1, \frac{1}{e}\right).}$$

b) Soit $n \geqslant 2$. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-1)e^{-x} = nx^{n-1}e^{-x} - x^ne^{-x} = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

3) En particulier, pour tout réel x, $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$. Donc, la fonction f_3' est strictement positive sur $]-\infty, 0[\cup]0, 3[$ et strictement négative sur $]3, +\infty[$ puis la fonction f_3 est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$ et strictement décroissante sur $[3, +\infty[$. La fonction f_3 admet donc un maximum atteint en $x = 3$.

4) a) Soit $k \geqslant 2$. Une équation de T_k est $y = f_k(1) + f_k'(1)(x-1)$ avec $f_k(1) = e^{-1}$ et $f_k'(1) = 1^{k-1}(k-1)e^{-1} = (k-1)e^{-1}$.

Une équation de T_k est donc $y = e^{-1} + (k-1)e^{-1}(x-1)$ ou encore $y = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{2-k}{e}$. Ensuite,

$$\frac{k-1}{e}x + \frac{2-k}{e} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}((k-1)x-(k-2)) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x-(k-2) = 0 \Leftrightarrow (k-1)x = k-2 \Leftrightarrow x = \frac{k-2}{k-1}.$$

Donc la tangente T_k coupe l'axe des abscisses au point A_k de coordonnées $\left(\dfrac{k-2}{k-1}, 0\right)$.

b) Soit $k \geqslant 2$.

$$A_k = A \Leftrightarrow \frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1) \Leftrightarrow 5k-4k = 10-4 \Leftrightarrow k = 6.$$

$$\boxed{k = 6.}$$

PARTIE B

1) On a $I_1 = \displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$, on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left[x(-e^{-x})\right]_0^1 - \int_0^1 1(-e^{-x})\,dx \\ &= (-e^{-1}) - (0) + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 \\ &= 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}. \end{aligned}$$

$$\boxed{I_1 = 1 - 2e^{-1} = \frac{e-2}{e}.}$$

2) a) Puisque chaque fonction f_n est continue et positive sur $[0,1]$, I_n est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_n$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$. D'après le graphique, il semblerait que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ soit décroissante.

b) Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x})\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \end{aligned}$$

Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $e^{-x} \geqslant 0$. Donc pour tout réel x de $[0,1]$, on a $x^n(x-1)e^{-x} \leqslant 0$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}\,dx \leqslant 0$ ou encore que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$$

c) D'autre part, chaque fonction f_n, $n \geqslant 1$, est positive sur $[0,1]$ et donc, par positivité de l'intégrale, pour tout entier naturel non nul n, on a $I_n \geqslant 0$.

En résumé, la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

d) Soit $n \geqslant 1$. Pour tout réel x de $[0,1]$, on a $-x \leqslant 0$ et donc $0 \leqslant e^{-x} \leqslant e^0$ ou encore $0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$. En multipliant les trois membres de cet encadrement par le réel positif x^n, on obtient $0 \leqslant x^n e^{-x} \leqslant x^n$. Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx$$

avec $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n,

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$