

**BACCALAUREAT GENERAL**

**MATHEMATIQUES**

**Série S**

**Enseignement Obligatoire**

*Durée de l'épreuve : 4 heures*

*Coefficient : 7*

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

Du papier millimétré est mis à la disposition des candidats.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée.

*Le candidat doit traiter tous les exercices.  
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour  
une part importante dans l'appréciation des copies.*

## EXERCICE 1 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

On considère une droite  $D$  munie d'un repère  $(O, \vec{i})$ .

Soit  $(A_n)$  la suite de points de la droite  $D$  ainsi définie :

- $A_0$  est le point  $O$  ;
- $A_1$  est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel  $n$ , le point  $A_{n+2}$  est le milieu du segment  $[A_n A_{n+1}]$ .

1. a. Placer sur un dessin la droite  $D$ , les points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$  et  $A_6$ .  
On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $a_n$  l'abscisse du point  $A_n$ .

Calculer  $a_2, a_3, a_4, a_5$  et  $a_6$ .

c. Pour tout entier naturel  $n$ , justifier l'égalité :  $a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$ .

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier  $n$ ,  $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$ .

3. Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = a_n - \frac{2}{3}$ .

Démontrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{1}{2}$ .

4. Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ , puis celle de la suite  $(a_n)$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

(Commun n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse qui n'est pas justifiée ne sera pas prise en compte.

Toute justification incomplète sera valorisée.

**Question 1** On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives :

$$a = 1 + i, \quad b = 3i, \quad c = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\right).$$

*Affirmation*

Le triangle  $ABC$  est un triangle équilatéral.

**Question 2** On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , la transformation  $f$  dont une écriture complexe est :  $z' = \left(\frac{2i}{\sqrt{3} + i}\right)z$ .

*Affirmation*

La transformation  $f$  est la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

**Question 3** On considère le nombre complexe  $a = (-\sqrt{3} + i)^{2011}$ .

*Affirmation*

Le nombre complexe  $a$  est un nombre imaginaire pur.

**Question 4** Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , où  $\lambda$  est un nombre strictement positif.

On rappelle que, pour tout réel  $t$  strictement positif, la probabilité de l'événement  $(X \leq t)$  s'exprime par  $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ .

*Affirmation*

Sachant que  $X \geq 2$ , la probabilité que  $X$  appartienne à l'intervalle  $[2; 3]$  est égale à  $1 - e^{-\lambda}$ .

**Question 5** Une urne contient au total  $n$  boules dont cinq sont blanches et les autres noires.

On effectue 10 tirages successifs indépendants en remettant la boule dans l'urne après chaque tirage.

*Affirmation*

La plus petite valeur de l'entier  $n$ , pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche sur les 10 tirages est supérieure ou égale à 0,9999, est égale à 13.

### EXERCICE 3 (5 points )

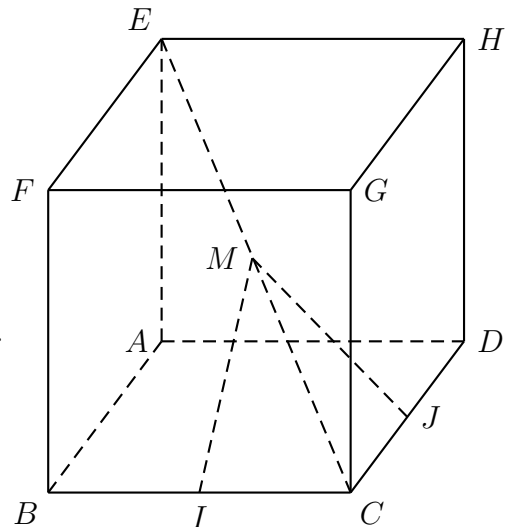
(Commun à tous les candidats)

La figure ci-contre représente un cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1.

On désigne par  $I$  et  $J$  les milieux respectifs des arêtes  $[BC]$  et  $[CD]$ .

Soit  $M$  un point quelconque du segment  $[CE]$ .

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .



1.
  - a. Donner, sans justification, les coordonnées des points  $C$ ,  $E$ ,  $I$  et  $J$ .
  - b. Justifier l'existence d'un réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ , tel que les coordonnées du point  $M$  soient  $(1 - t; 1 - t; t)$ .
2.
  - a. Démontrer que les points  $C$  et  $E$  appartiennent au plan médiateur du segment  $[IJ]$ .
  - b. En déduire que le triangle  $MIJ$  est un triangle isocèle en  $M$ .
  - c. Exprimer  $IM^2$  en fonction de  $t$ .
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point  $M$  sur le segment  $[CE]$  pour laquelle la mesure de l'angle  $\widehat{IMJ}$  est maximale.  
On désigne par  $\theta$  la mesure en radian de l'angle  $\widehat{IMJ}$ .
  - a. En admettant que la mesure  $\theta$  appartient à l'intervalle  $[0; \pi]$ , démontrer que la mesure  $\theta$  est maximale lorsque  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  est maximal.
  - b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur  $IM$  est minimale.
  - c. Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}.$$

- d. En déduire qu'il existe une unique position  $M_0$  du point  $M$  sur le segment  $[EC]$  telle que la mesure de l'angle  $\widehat{IMJ}$  soit maximale.
- e. Démontrer que le point  $M_0$  est le projeté orthogonal du point  $I$  sur le segment  $[EC]$ .

## EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par :

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  sont respectivement notées  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Leur tracé est donné en annexe.

### 1. Etude des fonctions $f$ et $g$

- Déterminer les limites des fonctions  $f$  et  $g$  en  $-\infty$ .
- Justifier le fait que les fonctions  $f$  et  $g$  ont pour limite 0 en  $+\infty$ .
- Étudier le sens de variations de chacune des fonctions  $f$  et  $g$  et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

### 2. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit l'intégrale  $I_n$  par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et, si } n \geq 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

- Calculer la valeur exacte de  $I_0$ .
- À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

- En déduire la valeur exacte de  $I_1$ , puis celle de  $I_2$ .

### 3. Calcul d'une aire plane

- Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .
- On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , d'autre part entre les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ . En exprimant  $\mathcal{A}$  comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :

$$\mathcal{A} = 3 - e.$$

### 4. Etude de l'égalité de deux aires

Soit  $a$  un réel strictement supérieur à 1.

On désigne par  $S(a)$  l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , d'autre part entre les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $x = a$ .

On admet que  $S(a)$  s'exprime par :

$$S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1).$$

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de  $a$  pour laquelle les aires  $\mathcal{A}$  et  $S(a)$  sont égales.

- Démontrer que l'équation  $S(a) = \mathcal{A}$  est équivalente à l'équation :

$$e^a = a^2 + a + 1.$$

- Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel  $a$ , solution du problème posé.

FEUILLE ANNEXE

Courbes de l'exercice 4

