EXERCICE 4 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et } g(x) = x^2e^{1-x}.$$

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ sont respectivement notées $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Leur tracé est donné en annexe.

1. Etude des fonctions f et g

a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.

b. Justifier le fait que les fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.

c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\, dx \text{ et, si } n \geqslant 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx.$$

a. Calculer la valeur exacte de I_0.

b. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.$$

c. En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3. Calcul d'une aire plane

a. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

b. On désigne par $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.
En exprimant $\mathscr{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité :

$$\mathscr{A} = e - 3.$$

4. Etude de l'égalité de deux aires

Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par $S(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = a$.

On admet que $S(a)$ s'exprime par :

$$S(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1).$$

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathscr{A}$ et $S(a)$ sont égales.

a. Démontrer que l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ est équivalente à l'équation :

$$e^a = a^2 + a + 1.$$

b. *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.

FEUILLE ANNEXE

Courbes de l'exercice 4