EXERCICE 4

1) Etude des fonctions f et g

a) Limite de f en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{1-x} = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

Limite de g en $-\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{1-x} = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.}$$

b) Limite de f en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $f(x) = x \times e \times \dfrac{1}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e \times \dfrac{1}{e^x/x} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Limite de g en $+\infty$. Pour tout réel non nul x, $g(x) = x^2 \times e \times \dfrac{1}{e^x} = e \times \dfrac{1}{e^x/x^2}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e \times \dfrac{1}{e^x/x^2} = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

c) Variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-1) \times e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $f'(x)$ est du signe de $1-x$. On en déduit le tableau de variations de le fonction f ($f(1) = 1 \times e^0 = 1$).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Variations de g. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = 2x \times e^{1-x} + x^2 \times (-1) \times e^{1-x} = (2x - x^2)e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{1-x} > 0$ et donc, pour tout réel x, $g'(x)$ est du signe de $x(2-x)$. On en déduit le tableau de variations de le fonction g.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) Calcul d'intégrales

a) La fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Donc I_0 existe.

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}\,dx = \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = (-e^{1-1}) - (-e^{1-0}) = e - 1.$$

$$\boxed{I_0 = e - 1.}$$

b) Soit n un entier naturel. On a $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx$. Pour x dans $[0,1]$, posons $u(x) = x^{n+1}$ et $v(x) = -e^{1-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0,1]$ et pour x dans $[0,1]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & v(x) = -e^{1-x} \\ u'(x) = (n+1)x^n & v'(x) = e^{1-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\,dx = \left[x^{n+1}(-e^{1-x})\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n(-e^{1-x})\,dx \\ &= (1^{n+1}(-e^{1-1}) - (0^{n+1}e^{1-0})) + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= -1 + (n+1)I_n. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n.}$$

c) $I_1 = -1 + 1 \times I_0 = -1 + (e-1) = e-2$ et $I_2 = -1 + 2 \times I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$.

$$\boxed{I_1 = e-2 \text{ et } I_2 = 2e-5.}$$

3) Calcul d'une aire plane

a) La position relative de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs de x. Soit x un réel.

$$f(x) - g(x) = xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(1-x)e^{1-x}.$$

Le signe de $f(x) - g(x)$ est donné dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de $\mathscr{C}'$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]1,+\infty[$, strictement au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $]0,1[$ et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ se coupent aux points de coordonnées $(0,0)$ et $(1,1)$.

b) D'après la question précédente, $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\mathscr{C}'$ sur $[0,1]$. Donc, d'après la question 2)c),

$$\mathscr{A} = \int_0^1 (f(x)-g(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = I_1 - I_2 = (e-2) - (2e-5) = 3-e.$$

$$\boxed{\mathscr{A} = 3-e.}$$

4) Etude de l'égalité de deux aires

a) Soit $a > 1$.

$$\begin{aligned} S(a) = \mathscr{A} &\Leftrightarrow 3 - e^{1-a}(a^2+a+1) = 3-e \Leftrightarrow e \times \frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{e^a}(a^2+a+1) = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2+a+1 = e^a \text{ (car } e^a \neq 0). \end{aligned}$$

b) Pour $a \geqslant 1$, posons $h(a) = e^a - a^2 - a - 1$ de sorte que $S(a) = \mathscr{A} \Leftrightarrow h(a) = 0$.
La fonction h est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h'(a) = e^a - 2a - 1$. De même, la fonction h' est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour $a \geqslant 1$, $h''(a) = e^a - 2$.
Pour $a > 1$, $h''(a) > e^1 - 2 > 0$. Donc la fonction h' est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
Puisque la fonction h' est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on sait que pour tout réel k de $\left[h'(1), \lim\limits_{a\to+\infty} h'(a)\right[$, l'équation $h'(a) = k$ admet une solution et une seule dans $[1,+\infty[$.
En particulier, puisque $\lim\limits_{a\to+\infty} e^a - 2a - 1 = \lim\limits_{a\to+\infty} e^a\left(1 - 2\frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et d'autre part $h'(1) = e - 2 - 1 = e - 3 < 0$, il existe un unique réel α de $[1,+\infty[$ et même $]1,+\infty[$ tel que $h'(\alpha) = 0$. Puisque la fonction h' est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on en déduit que la fonction h' est strictement négative sur $[1,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$ puis que la fonction h est strictement décroissante sur $[1,\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha,+\infty[$.

Puisque $h(1) = e - 3 < 0$ et que h est strictement décroissante sur $[1, \alpha]$, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) < 0$. En particulier, pour tout réel a de $[1, \alpha]$, on a $h(a) \neq 0$ et d'autre part, $h(\alpha) < 0$.
Ensuite, la fonction h est continue et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

On en déduit que pour tout réel k de $\left[h(\alpha), \lim\limits_{a \to +\infty} h(a)\right[$, l'équation $h(a) = k$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$.

En particulier, puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} h(a) = \lim\limits_{a \to +\infty} e^a \left(1 - \dfrac{a^2}{e^a} - \dfrac{a}{e^a} - \dfrac{1}{e^a}\right) = +\infty > 0$ et que $h(\alpha) < 0$, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[\alpha, +\infty[$.

En résumé, l'équation $h(a) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ ou encore l'équation $S(a) = \mathscr{A}$ admet une unique solution a_0 dans $[1, +\infty[$. On peut montrer que $1,79 < a_0 < 1,80$.