EXERCICE 2 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^x - 1.$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont données en annexe.

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $e^x > \ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

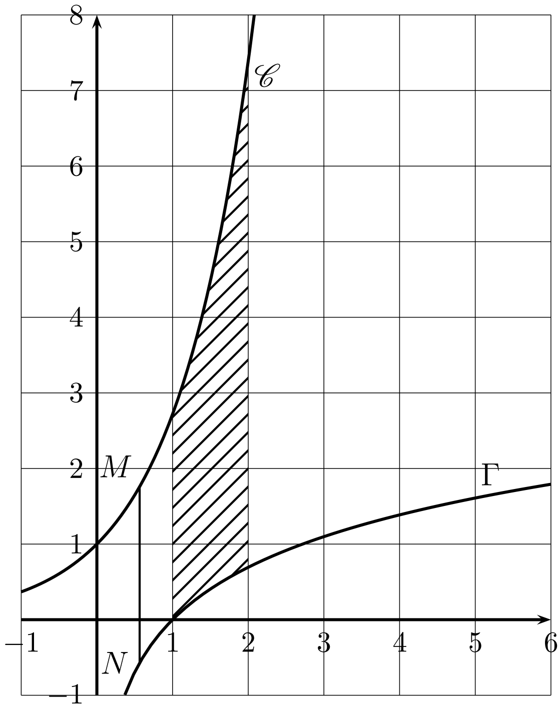
b. En utilisant la question 1., montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. a. Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$.

b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

FEUILLE ANNEXE

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4
Commun à tous les candidats