

EXERCICE 2

1) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geq 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Pour tout réel $x \geq 0$, on a $e^x > 0$ et $x+1 > 0$. Donc, pour tout réel $x \geq 0$, on a $f'(x) > 0$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	-1	$+\infty$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc pour tout réel k de $\left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. En particulier, puisque 0 appartient à $[-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $]0, +\infty[$. On note α cette solution.

La calculatrice fournit $f(0,56) = -0,01 \dots < 0$ et $f(0,57) = 0,007 \dots > 0$. Donc $f(0,56) < f(\alpha) < f(0,57)$ et, puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $0,56 < \alpha < 0,57$. Par suite,

$$\alpha = 0,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}$$

c) Soit $x \geq 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, si $0 \leq x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$ ou encore $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$ ou encore $f(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement négative sur $]0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et enfin, la fonction f s'annule en α .

2) a) Pour $x > 0$, posons $g(x) = MN = e^x - \ln x$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $f(x)$. D'après la question 1)c), la fonction g' est strictement négative sur $]0, \alpha[$ puis strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0, \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha, +\infty[$ puis que la fonction g admet un minimum en α . On a montré que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.

La calculatrice fournit encore $f(0,567) < 0$ et $f(0,568) > 0$. Donc, $0,567 < \alpha < 0,568$ puis

$$e^{0,567} - \ln(0,568) < e^\alpha - \ln \alpha < e^{0,568} - \ln(0,567)$$

ou encore $2,328 \dots < e^\alpha - \ln \alpha < 2,332 \dots$. Par suite, $e^\alpha - \ln \alpha = 2,33$ à 10^{-2} près.

$$MN_{\min} = 2,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse α est e^α .

La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse α est $\frac{1}{\alpha}$.

Puisque $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$, ces coefficients directeurs sont égaux ou encore

les tangentes à \mathcal{C} et Γ en leur point d'abscisse α sont parallèles.

3) a) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$. Donc,

la fonction h est une primitive de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$.

b) On note \mathcal{A} l'aire à calculer. Sur le segment $[1, 2]$, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et de plus, pour x réel de $[1, 2]$, on a $e^x > \ln x$. Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^2 (e^x - \ln x) \, dx = [e^x - (x \ln x - x)]_1^2 = [e^x - x \ln x + x]_1^2 \\ &= (e^2 - 2 \ln 2 + 2) - (e^1 - \ln 1 + 1) = e^2 - e + 1 - 2 \ln 2.\end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = e^2 - e + 1 - 2 \ln 2 = 4,28 \text{ unités d'aire à } 10^{-2} \text{ unité d'aire près.}$$