EXERCICE 2 (6 points)

(Commun à tous les candidats)

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = xe^x - 1.$$

a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ et étudier le sens de variation de f.

b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

2. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Γ celle de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ sont données en annexe.

Soit x un nombre réel strictement positif. On note M le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse x et N le point de Γ d'abscisse x.

On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $e^x > \ln(x)$.

a. Montrer que la longueur MN est minimale lorsque $x = \alpha$. Donner une valeur approchée de cette longueur minimale à 10^{-2} près.

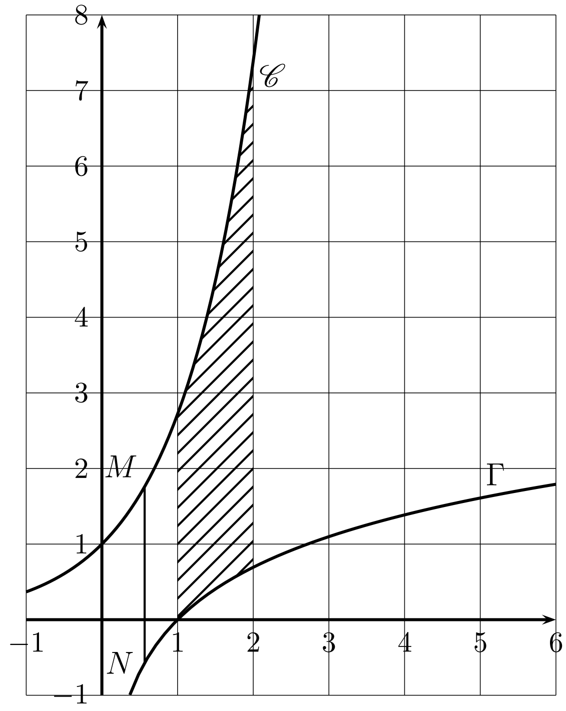
b. En utilisant la question 1., montrer que $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse α sont parallèles.

3. **a.** Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que la fonction h est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0, +\infty[$.

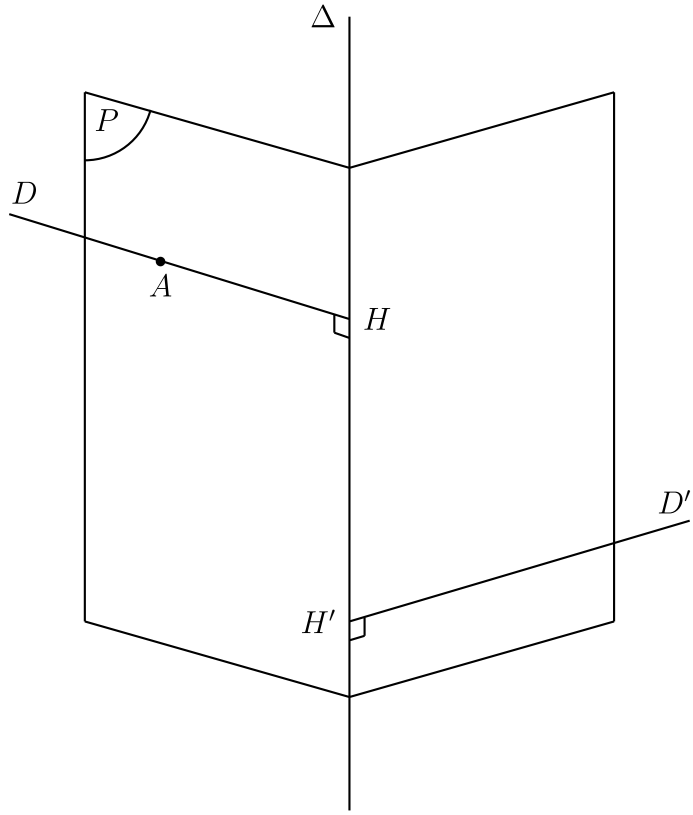
b. Calculer la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-2} près, de l'aire (exprimée en unités d'aire) de la surface hachurée sur la figure jointe en **annexe 1**.

FEUILLE ANNEXE

Annexe 1, exercice 2



Annexe 2, exercice 4
Commun à tous les candidats



EXERCICE 2

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (xe^x - 1) = +\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x.$$

Pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $e^x > 0$ et $x + 1 > 0$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a $f'(x) > 0$.
On en déduit le tableau de variations de f :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-1 \nearrow +\infty$

b) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Donc pour tout réel k de $\left[f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, puisque 0 appartient à $[-1, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. On note α cette solution.

La calculatrice fournit $f(0,56) = -0,01\ldots < 0$ et $f(0,57) = 0,007\ldots > 0$. Donc $f(0,56) < f(\alpha) < f(0,57)$ et, puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $0,56 < \alpha < 0,57$. Par suite,

$$\boxed{\alpha = 0,56 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut.}}$$

c) Soit $x \geqslant 0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $f(x) < f(\alpha)$ ou encore $f(x) < 0$ et si $x > \alpha$, alors $f(x) > f(\alpha)$ ou encore $f(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement négative sur $[0, \alpha[$, strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$ et enfin, la fonction f s'annule en α.

2) a) Pour $x > 0$, posons $g(x) = MN = e^x - \ln x$. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$,

$$g'(x) = e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 1}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

Sur $]0, +\infty[$, $g'(x)$ est du signe de $f(x)$. D'après la question 1)c), la fonction g' est strictement négative sur $[0, \alpha[$ puis strictement positive sur $]\alpha, +\infty[$. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $[0, \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$ puis que la fonction g admet un minimum en α. On a montré que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.

La calculatrice fournit encore $f(0,567) < 0$ et $f(0,568) > 0$. Donc, $0,567 < \alpha < 0,568$ puis

$$e^{0,567} - \ln(0,568) < e^\alpha - \ln\alpha < e^{0,568} - \ln(0,567)$$

ou encore $2,328\ldots < e^\alpha - \ln\alpha < 2,332\ldots$ Par suite, $e^\alpha - \ln\alpha = 2,33$ à 10^{-2} près.

$$\boxed{MN_{min} = 2,33 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

b) $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha e^\alpha = 1 \Leftrightarrow e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α est e^α.
La dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Donc, le coefficient directeur de la tangente à Γ au point d'abscisse α est $\dfrac{1}{\alpha}$.
Puisque $e^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$, ces coefficients directeurs sont égaux ou encore

$$\boxed{\text{les tangentes à } \mathscr{C} \text{ et } \Gamma \text{ en leur point d'abscisse } \alpha \text{ sont parallèles.}}$$

3) a) La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $h'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.
Donc,

$$\boxed{\text{la fonction } h \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

b) On note $\mathscr{A}$ l'aire à calculer. Sur le segment $[1,2]$, les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln x$ sont continues et de plus, pour x réel de $[1,2]$, on a $e^x > \ln x$. Donc

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= \int_1^2 (e^x - \ln x)\ dx = [e^x - (x\ln x - x)]_1^2 = [e^x - x\ln x + x]_1^2 \\ &= (e^2 - 2\ln 2 + 2) - (e^1 - \ln 1 + 1) = e^2 - e + 1 - 2\ln 2.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{A} = e^2 - e + 1 - 2\ln 2 = 4,28 \text{ unités d'aire à } 10^{-2} \text{ unité d'aire près.}}$

