BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
France métropolitaine

EXERCICE 1

Partie A :

1) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x

$$u'(x) + u(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) + xe^{-x} = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}.$$

On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est une solution de l'équation } (E) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

2) Soit a un réel. On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-ax}$, $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 1$ et donc les solutions de l'équation différentielle (E') sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.

3) La fonction $v - u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
v \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) + v(x) = e^{-x} \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) + v(x) = u'(x) + u(x) \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ v'(x) - u'(x) + v(x) - u(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \text{ pour tout réel } x,\ (v - u)'(x) + (v - u)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow v - u \text{ solution de } (E') \text{ sur } \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4) D'après les deux questions précédentes, v est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x, $v(x) - u(x) = ke^{-x}$ ou encore pour tout réel x, $v(x) = xe^{-x} + ke^{-x}$.

$$\boxed{\text{les solutions de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les fonctions de la forme } x \mapsto (x + k)e^{-x},\ k \in \mathbb{R}.}$$

5) g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Donc, il existe un réel k tel que pour tout réel x, $g(x) = (x + k)e^{-x}$. Puis

$$g(0) = 2 \Leftrightarrow (0 + k)e^0 = 2 \Leftrightarrow k = 2.$$

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) = (x + 2)e^{-x}.}$$

Partie B

1) Soit $k \in \mathbb{R}$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f_k'(x) = 1 \times e^{-x} + (x + k) \times (-e^{-x}) = e^{-x} - (x + k)e^{-x} = (-x + (1 - k))e^{-x}.$$

Pour tout réel x, $e^{-x} > 0$ et donc pour tout réel x, $f_k'(x)$ est du signe de $-x + (1 - k)$. Par suite, pour tout réel x de $]-\infty, 1 - k]$, $f_k'(x) \geqslant 0$ et pour tout réel x de $[1 - k, +\infty[$, $f_k'(x) \leqslant 0$.
On en déduit que la fonction f_k est croissante sur $]-\infty, 1 - k]$ et décroissante sur $[1 - k, +\infty[$ puis que

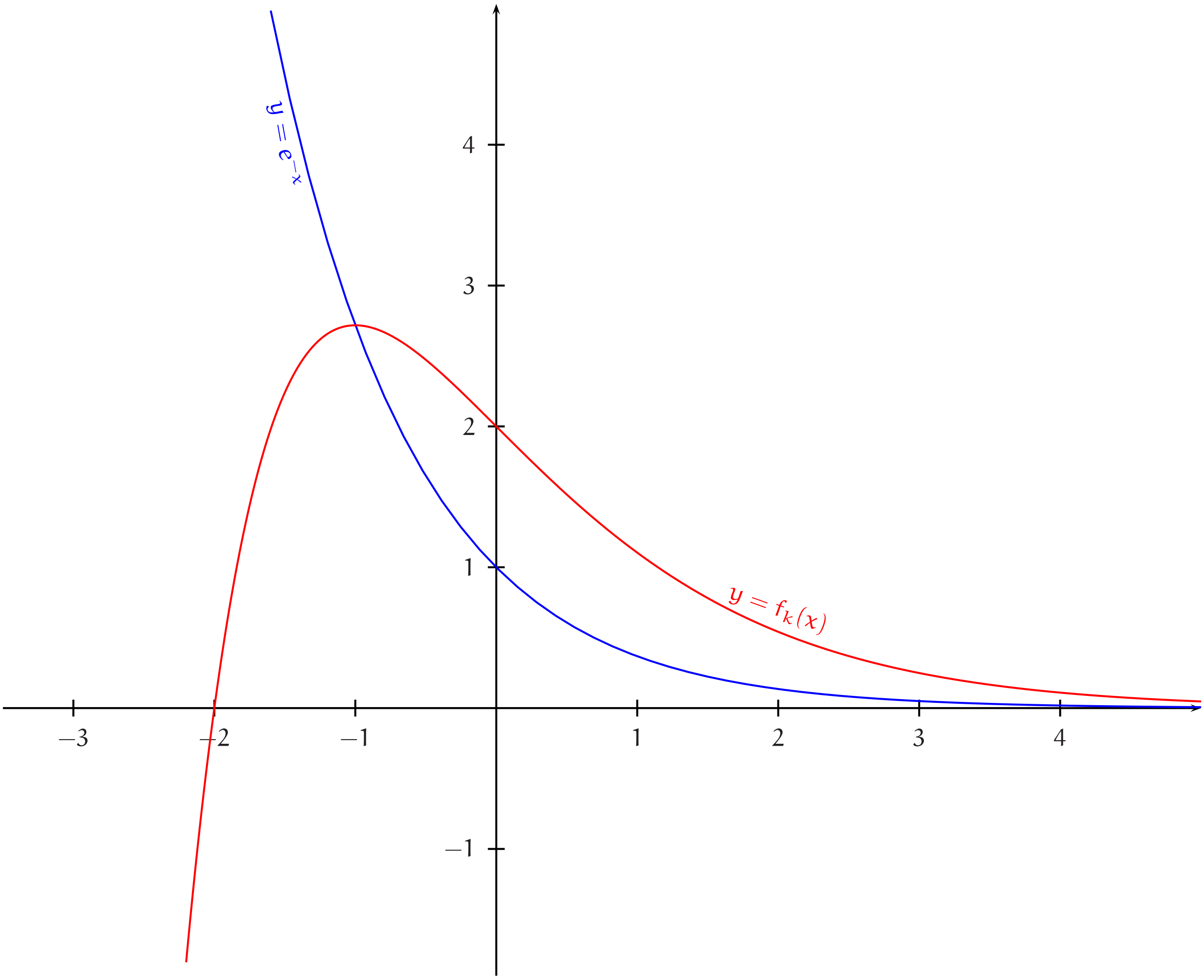
$$\boxed{\text{la fonction } f_k \text{ admet un maximum en } 1 - k.}$$

2) Soit $k \in \mathbb{R}$.

$$f_k(1-k) = (1-k+k)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}.$$

Ainsi, $y_{M_k} = e^{-x_{M_k}}$ et donc le point M_k appartient à la courbe Γ d'équation $y = e^{-x}$.

3) a) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Son graphe ne peut être la courbe rouge. Donc la courbe rouge est une courbe $\mathscr{C}_k$ et la courbe bleue est la courbe Γ.



b) Puisque $e^{-0} = 1$, la courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 1)$ ce qui définit l'unité choisie en ordonnée.
Mais alors, la courbe bleue coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0, 2)$ et donc la fonction f_k est la solution de l'équation (E) prenant la valeur 2 en 0. Il s'agit donc de la fonction g déterminée à la question A.5).

4) Pour x dans $[0, 2]$, posons $u(x) = x + 2$ et $v(x) = -e^{-x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[0, 2]$ et pour x dans $[0, 2]$ on a

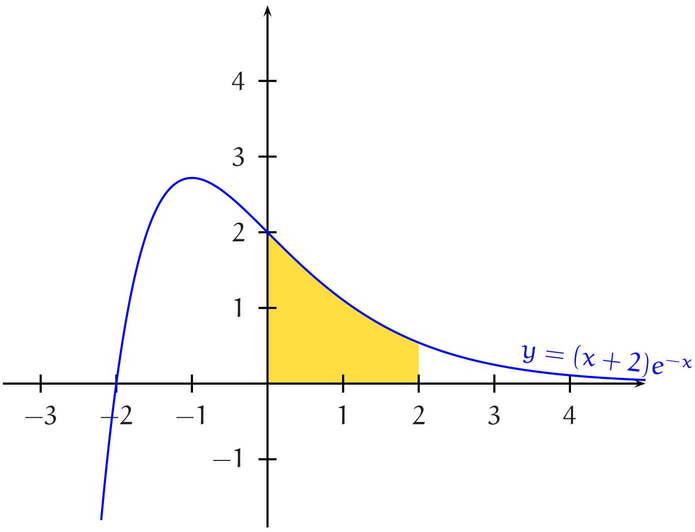
$$\begin{array}{ll} u(x) = x + 2 & v(x) = -e^{-x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{-x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[0, 2]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx &= \left[(x+2)(-e^{-x})\right]_0^2 - \int_0^2 1 \times (-e^{-x})\,dx = -4e^{-2} - (-2e^0) - \left[e^{-x}\right]_0^2 \\ &= -4e^{-2} + 2 - (e^{-2} - 1) = 3 - 5e^{-2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^2 (x+2)e^{-x}\,dx = 3 - 5e^{-2}.}$$

Puisque la fonction g est positive sur $[0, 2]$, le nombre obtenu est l'aire en unités d'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.



EXERCICE 2

1) Restitution organisée de connaissances.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante.
D'après la propriété 1, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant v_n$. D'autre part, puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n, on a $v_n \leqslant v_0$.
On en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant v_0$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par v_0. La suite (u_n) est donc convergente d'après la propriété 2.
De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 et donc la suite (v_n) est convergente.

Posons alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. On a

$$\ell - \ell' = \lim_{n\to+\infty} u_n - \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0,$$

et donc $\ell = \ell'$. On a montré que

$$\boxed{\text{deux suites adjacentes convergent et ont même limite.}}$$

2) a) Pour tout entier naturel n, $10^{-n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n$. La suite $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{10}$. Puisque $0 \leqslant \frac{1}{10} < 1$, on sait que la suite $\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle.

On en déduit que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite quand n tend vers $+\infty$, à savoir 1. On en déduit aussi que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante et donc que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. Ainsi, les deux suites (u_n) et (v_n) ont même limite. Néanmoins, les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes et donc les deux suites (u_n) et (v_n) ne peuvent être adjacentes.

c) Pour tout entier naturel non nul n, $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. Les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et donc la suite (u_n) est strictement croissante. D'autre part, si n est impair, alors $n+1$ est pair et

$$v_{n+1} - v_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

et donc, si n est impair, $v_{n+1} - v_n > 0$. Ainsi, la suite (v_n) n'est pas décroissante et donc les suites (u_n) et (v_n) ne sont pas adjacentes.

3) La suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. Soit alors a un réel positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
0 < n \leqslant n+1 &\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < a + \frac{1}{n+1} \leqslant a + \frac{1}{n} \\
&\Rightarrow \ln\left(a + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \ln\left(a + \frac{1}{n}\right) \text{ (car la fonction ln est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Rightarrow v_{n+1} \leqslant v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout choix de a, la suite (v_n) est décroissante. Donc, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Or, si $a = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{X\to0} \ln(X) = -\infty \neq 1$ et si $a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln(a)$. Donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si $\ln(a) = 1$ ou encore $a = e$.

$$\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes si et seulement si } a = e.}$$

EXERCICE 3

1) $\dfrac{21}{40}$

2) $\dbinom{5}{2} \times \left(\dfrac{3}{10}\right)^3 \times \left(\dfrac{7}{10}\right)^2$

3) $\dfrac{14}{23}$

4) $e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}$

Explications.

1) Le nombre de tirages simultanés de 3 boules parmi 10 est

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 5 \times 3 \times 8 = 120$$

Le nombre de tirages simultanés de 2 boules blanches et d'une boule noire parmi les 10 boules est

$$\binom{7}{2} \times \binom{3}{1} = \frac{7 \times 6}{2} \times 3 = 21 \times 3 = 63.$$

La probabilité cherchée est donc $\dfrac{63}{120} = \dfrac{21}{40}$.

2) Notons X le nombre de boules blanches obtenues au bout de cinq tirages. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

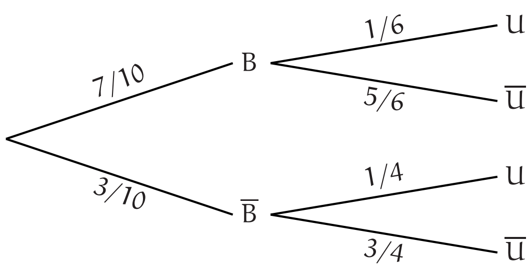
- 5 expériences identiques et indépendantes (puisque les tirages se font avec remise) sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « la boule est blanche » avec une probabilité $p = \dfrac{7}{10}$ ou « la boule est noire » avec une probabilité $1 - p = \dfrac{3}{10}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \dfrac{7}{10}$.

La probabilité demandée est $p(X = 2)$ et on a

$$p(X = 2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{3}{10}\right)^3 \times \left(\frac{7}{10}\right)^2.$$

3) Représentons la situation par un arbre. On note B l'événement « la boule tirée est blanche » et U l'événement « le joueur obtient le numéro 1 ».



La probabilité demandée est $p_U(B)$.

$$p_U(B) = \frac{p(U \cap B)}{p(U)} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(U \cap B) + p(U \cap \overline{B})} = \frac{p(B) \times p_B(U)}{p(B) \times p_B(U) + p(\overline{B}) \times p_{\overline{B}}(U)}$$

$$= \frac{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{7}{10} \times \dfrac{1}{6} + \dfrac{3}{10} \times \dfrac{1}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{7}{6} + \dfrac{3}{4}} = \frac{\dfrac{7}{6}}{\dfrac{23}{12}} = \frac{7}{6} \times \frac{12}{23} = \frac{14}{23}.$$

4) On sait que $p(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$ puis

$$p(1 \leqslant X \leqslant 3) = p(X \leqslant 3) - p(X \leqslant 1) = (1 - e^{-3\lambda}) - (1 - e^{-\lambda}) = e^{-\lambda} - e^{-3\lambda}.$$

EXERCICE 4

1) a) $z'_A = -1+2 = 1 = z_A$ et $z'_\Omega = -(1-i\sqrt{3})+2 = 1+i\sqrt{3} = z_\Omega$. Donc

$$\boxed{T(A) = A \text{ et } T(\Omega) = \Omega.}$$

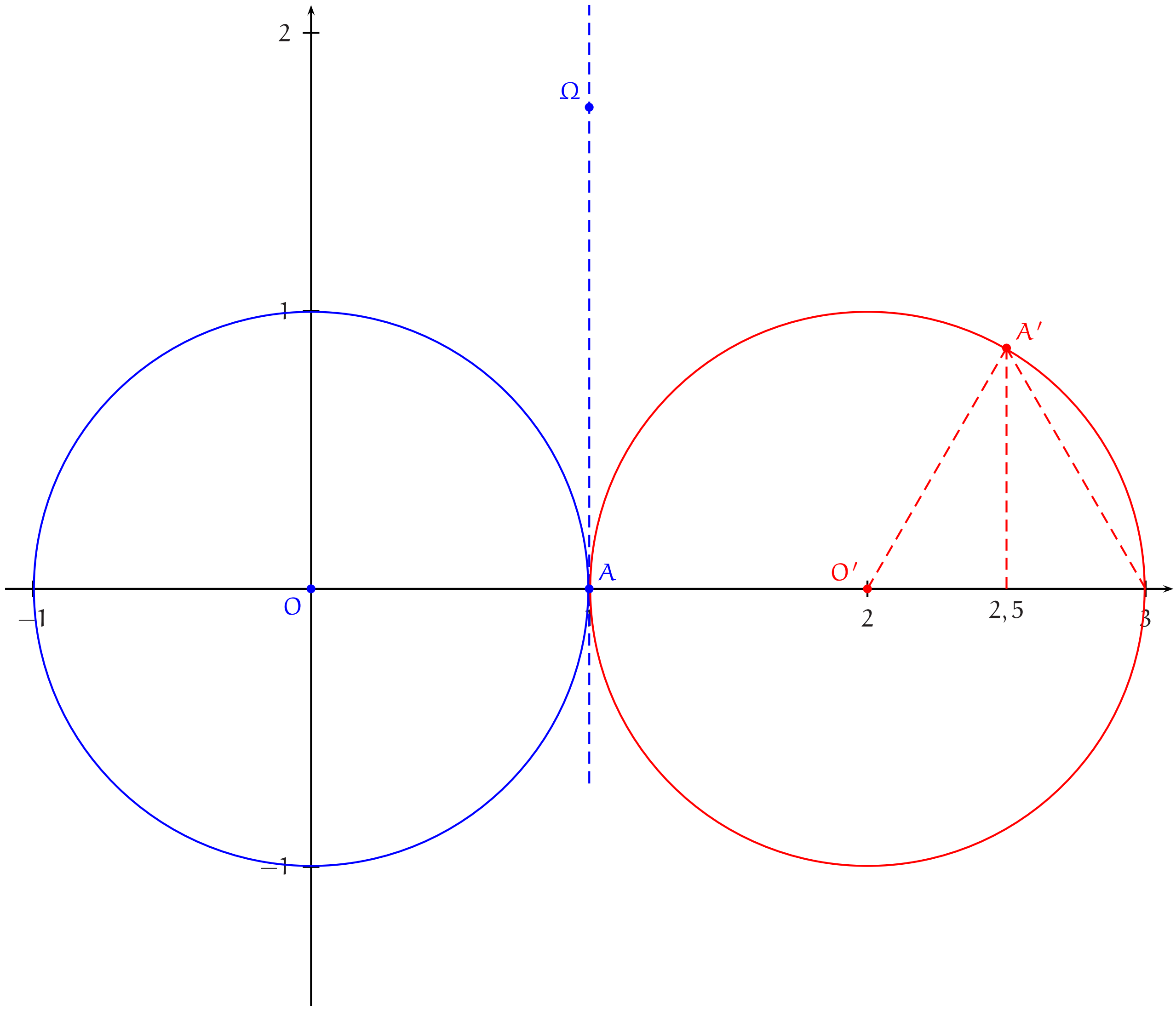
b) L'expression complexe de T est de la forme $z' = a\overline{z}+b$ avec $|a| = 1$. Donc T est une isométrie indirecte. De plus, d'après la question précédente, T admet au moins deux points distincts invariants, à savoir les points A et Ω. Donc

$$\boxed{T \text{ est la réflexion d'axe la droite } (A\Omega) \text{ d'équation } x = 1.}$$

c) Puisque T est une isométrie, l'image par T du cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1 est le cercle $(\mathscr{C}')$ de centre $O' = T(O)$ et de même rayon 1. De plus, $T(O)$ est le point d'affixe 2 ou encore le point de coordonnées $(2, 0)$.

$$\boxed{T(\mathscr{C}) \text{ est le cercle de centre } O'(2,0) \text{ et de rayon } 1.}$$

2) a) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ et donc A' est le point du cercle $(\mathscr{C}')$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{O'A'}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π].



b) Si M est un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe z, alors $z \neq 0$ car $|z| = 1 \neq 0$ et $z' \neq 2$ car $M' \in (\mathscr{C}')$ et donc $|z'-2| = 1 \neq 0$ puis

$$\left|\frac{z'-2}{z}\right| = \frac{|z'-2|}{|z|} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{1}{1} = 1,$$

et

$$\arg\left(\frac{z'-2}{z}\right) = \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ [modulo } 2\pi].$$

On en déduit que $\dfrac{z'-2}{z} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et donc que

$$\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2.}$$

c) L'expression complexe de r est de la forme $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \neq 1$. Donc r est une rotation. L'angle de r est $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$ [modulo 2π]. Le centre de r est Ω l'unique point invariant par r. Or

$$z' = z \Leftrightarrow z = \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z + 2 \Leftrightarrow 2z = (1+i\sqrt{3})z + 4 \Leftrightarrow (1-i\sqrt{3})z = 4 \Leftrightarrow z = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} \Leftrightarrow z = \frac{4(1+i\sqrt{3})}{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \Leftrightarrow z = 1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow M = \Omega.$$

$$\boxed{r \text{ est la rotation de centre } \Omega \text{ et d'angle } \frac{\pi}{3}.}$$

3) Soit M un point du plan d'affixe z. Alors

$$z_{M_1} = \frac{z+z'}{2} = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}z + 1.$$

Ainsi, pour tout point M du plan, M_1 est l'image du point M par la similitude directe s d'expression complexe $z' = \dfrac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}z + 1$. Le rapport de cette similitude est

$$k = \left|\frac{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}{2}\right| = \left|\frac{1+\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}{2}\right| = \frac{1}{4}\left|3+i\sqrt{3}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quand M décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1, M_1 décrit l'image du cercle $(\mathscr{C})$ par la similitude s c'est-dire le cercle de centre $s(O) = A$ (car si $z = 0$ alors $z' = 1$) et de rayon $k \times 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\text{Quand } M \text{ décrit le cercle } (\mathscr{C}),\ M_1 \text{ décrit le cercle } (\mathscr{C}_1) \text{ de centre } A \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

