BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010
MATHEMATIQUES
- Série S -
Enseignement de Spécialité
Polynésie

EXERCICE 1

Partie A - Restitution organisée de connaissances

a) Soient a, b, a' et b' quatre nombres réels puis $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= (a - ib)(a' - ib') = (aa' - bb') - i(ab' + ba') = \overline{((aa' - bb') + i(ab' + ba'))} \\ &= \overline{(a + ib)(a' + ib')} = \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tous nombres complexes } z \text{ et } z',\ \overline{z} \times \overline{z'} = \overline{z \times z'}.}$$

b) Soit z un nombre complexe. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

• C'est vrai pour $n = 1$ car $\overline{z^1} = \overline{z} = (\overline{z})^1$.
• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Alors

$$\begin{aligned}\overline{z^{n+1}} &= \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} \text{ (d'après a))} \\ &= (\overline{z})^n \times \overline{z} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= (\overline{z})^{n+1}.\end{aligned}$$

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z \text{ et tout entier naturel non nul } n,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n.}$$

Partie B

1. Soit z un nombre complexe. Puisque $(-z)^4 = z^4$, $z^4 = -4 \Rightarrow (-z)^4 = -4$. D'autre part, puisque -4 est un nombre réel, $z^4 = -4 \Rightarrow \overline{z^4} = \overline{-4} \Rightarrow (\overline{z})^4 = -4$. On a montré que

$$\boxed{\text{si } z \text{ est solution de } (E) \text{ alors } -z \text{ et } \overline{z} \text{ sont solutions de } (E).}$$

2. a) $z_0 = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$$\boxed{z_0 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.}$$

b) $z_0^4 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(e^{i\pi/4}\right)^4 = 4e^{i\pi} = 4(-1 + 0i) = -4$. Donc z_0 est solution de l'équation (E).

3. L'équation (E) admet $z_0 = 1 + i$ pour solution. mais alors, d'après la question 1, l'équation (E) admet aussi pour solution $-z_0 = -1 - i$, $\overline{z_0} = 1 - i$ et $-\overline{z_0} = -1 + i$.

$$\boxed{\text{L'équation } (E) \text{ admet pour solutions } 1 + i,\ 1 - i,\ -1 + i \text{ et } -1 - i.}$$

Partie C

1. L'expression complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est $z' = \omega + e^{i\theta}(z-\omega)$. Donc l'expression complexe de la rotation r est

$$\begin{aligned}
z' &= -1-i+\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)(z+1+i) = -1-i+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(z+1+i)\\
&= \frac{1}{2}(-2-2i)+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(1+i) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(-2-2i+1+\sqrt{3}-i\sqrt{3}+i)\\
&= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))
\end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned}
z_E &= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z_B+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(-1+i)+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))\\
&= \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = -1+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_E = -1+\sqrt{3}.}$$

b)

$$\begin{aligned}
z_F &= \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})z_D+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})(1-i)+\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3}))\\
&= \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}-i\sqrt{3}-i-1+\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})) = -i(1+\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{z_F = -i(1+\sqrt{3}).}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F} &= \frac{1+i-(-1+\sqrt{3})}{1+i+i(1+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}+i}{1+i(2+\sqrt{3})} = (2-\sqrt{3})\frac{1+\dfrac{i}{2-\sqrt{3}}}{1+i(2+\sqrt{3})}\\
&= (2-\sqrt{3})\frac{1+i(2+\sqrt{3})}{1+i(2+\sqrt{3})}\ (\text{car } (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1)\\
&= 2-\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

En particulier, $\dfrac{z_A-z_E}{z_A-z_F}$ est un nombre réel.

d) Un réel non nul admet pour argument 0 ou π modulo 2π et donc

$$\left(\overrightarrow{FA},\overrightarrow{EA}\right) = \arg\left(\frac{z_A-z_E}{z_A-z_F}\right) = 0\ [\pi].$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{les points } A,\ E \text{ et } F \text{ sont alignés.}}$$

EXERCICE 2

Partie A - Un seul robot

1. Notons p la probabilité que le robot passe par le sommet I. Alors,

$$1 = p(S) + p(I) + p(X) = 2p + p + 2p = 5p,$$

et donc $p = \frac{1}{5}$.

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un robot passe par le sommet I est } \frac{1}{5}.}$$

2. Puisque les étapes sont indépendantes les unes des autres, la probabilité que le robot passe par les sommets S, I et X dans cet ordre est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{125}$.

$$\boxed{p(E) = \frac{4}{125}.}$$

3. Il y a $3! = 6$ trajets passant par les sommets S, I et X à savoir SIX, SXI, ISX, IXS, XSI et XIS. Chacun de ces trajets a une probabilité $\frac{4}{125}$ et donc $p(F) = 6 \times \frac{4}{125} = \frac{24}{125}$.

$$\boxed{p(F) = \frac{24}{125}.}$$

Partie B - Plusieurs robots

Notons X le nombre de robots passant successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le robot passe successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $p = \frac{4}{125}$ ou « le robot ne passe pas successivement par les sommets S, I et X dans cet ordre » avec une probabilité $1 - p = \frac{121}{125}$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{4}{125}$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$ et on a

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{4}{125}\right)^0 \times \left(\frac{121}{125}\right)^n = 1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
1 - \left(\frac{121}{125}\right)^n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow \left(\frac{121}{125}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{125}{121}\right)^n \geqslant 100 \text{ (car la fonction } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{125}{121}\right)^n\right) \geqslant \ln(100) \text{ (car la fonction } \ln \text{ est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow n \ln\left(\frac{125}{121}\right) \geqslant \ln(100) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{125}{121}\right)} \text{ (car } \frac{125}{121} > 1 \text{ et donc } \ln\left(\frac{125}{121}\right) > 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 141,5\ldots \Leftrightarrow n \geqslant 142 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le nombre minimal cherché est } 142.}$$

EXERCICE 3

Partie A

1. Le couple $(x_0, y_0) = (1, 1)$ est une solution particulière de l'équation (E).

2. Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$7x - 6y = 1 \Rightarrow 7x - 6y = 7x_0 - 6y_0 \Rightarrow 7(x - x_0) = 6(y - y_0).$$

Mais alors, puisque l'entier 7 divise l'entier $7(x - x_0)$, l'entier 7 divise l'entier $6(y - y_0)$. Puisque d'autre part, les entiers 6 et 7 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 7 divise l'entier $y - y_0$. De même, l'entier 6 divise $x - x_0$. Par suite, il existe des entiers relatifs k et k' tels que $x - x_0 = 6k$ et $y - y_0 = 7k'$ ou encore $x = 1 + 6k$ et $y = 1 + 7k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = 1 + 6k$ et $y = 1 + 7k'$.

$$7x - 6y = 1 \Leftrightarrow 7(1 + 6k) - 6(1 + 7k') = 1 \Leftrightarrow 42(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Finalement, les couples d'entiers relatifs solutions de (E) sont les couples de la forme $(1 + 6k, 1 + 7k)$ où $k \in \mathbb{Z}$. Enfin, les entiers relatifs $1 + 6k$ et $1 + 7k$ sont positifs si et seulement si k est positif et donc

les couples d'entiers naturels solutions de (E) sont les couples de la forme $(1 + 6k, 1 + 7k)$ où $k \in \mathbb{N}$.

Partie B

1. • Si $m = 1$, l'équation (F) s'écrit $7^n = 7$ et admet pour unique solution $n = 1$.
• Si $m = 2$, l'équation (F) s'écrit $7^n = 13$ et n'admet pas de solution.
• Si $m = 3$, l'équation (F) s'écrit $7^n = 25$ et n'admet pas de solution.
• Si $m = 4$, l'équation (F) s'écrit $7^n = 49$ et admet pour unique solution $n = 2$.

En résumé, il y a exactement deux couples (n, m) solutions de (F) tels que $m \leqslant 4$ à savoir $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

2. a) Si $m \geqslant 5$, $2^m = 2^{m-5} \times 2^5 = 32 \times 2^{m-5}$ et donc $2^m \equiv 0$ [32]. Mais alors, si le couple (n, m) est solution de (F), alors $7^n = 1 + 3 \times 2^m \equiv 1$ [32].

b) $7^0 = 1 \equiv 1$ [32]. $7^1 = 7 \equiv 7$ [32], $7^2 = 49 \equiv 17$ [32].
Ensuite, $7^3 \equiv 7 \times 17$ [32] puis $7^3 \equiv 119$ [32] puis $7^3 \equiv 23$ [32].
Enfin, $7^4 \equiv 7 \times 23$ [32] puis $7^4 \equiv 161$ [32] puis $7^4 \equiv 1$ [32].

Posons alors $n = 4q + r$ où $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ (division euclidienne de n par 4).
On a $7^n = 7^{4q+r} = (7^4)^q \times 7^r$ et donc $7^n \equiv (1^4)^q \times 7^r$ [32] ou encore $7^n \equiv 7^r$ [32]. Les calculs initiaux montrent alors que $7^n \equiv 1$ [32] si et seulement si $r = 0$ ce qui équivaut à n est divisible par 4. Donc, si (n, m) est une solution de (F) telle que $m \geqslant 5$, n est nécessairement un multiple de 4.

c) Posons donc $n = 4q$ où q est un entier naturel non nul. $7^n = 7^{4q} \equiv (2^4)^q$ [5] puis $7^n \equiv 16^q$ [5] puis $7^n \equiv 1^q$ [5] et finalement $7^n \equiv 1$ [5].

d) Si (n, m) est un couple d'entiers naturels non nuls solution de (F), alors $3 \times 2^m = 7^n - 1$ puis $3 \times 2^m \equiv 0$ [5]. Par suite, le nombre premier 5 doit diviser l'entier naturel 3×2^m ce qui n'est pas car 5 n'est pas un facteur premier de 3×2^m. Il n'y a donc pas de couple solution tel que $m \geqslant 5$.

3. En résumé, l'équation (F) admet exactement deux solutions. Ce sont les couples $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

EXERCICE 4

Partie A

1. **a)** • La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a $g'(1) = 0$ et pour $x > 1$, $g'(x) < 0$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

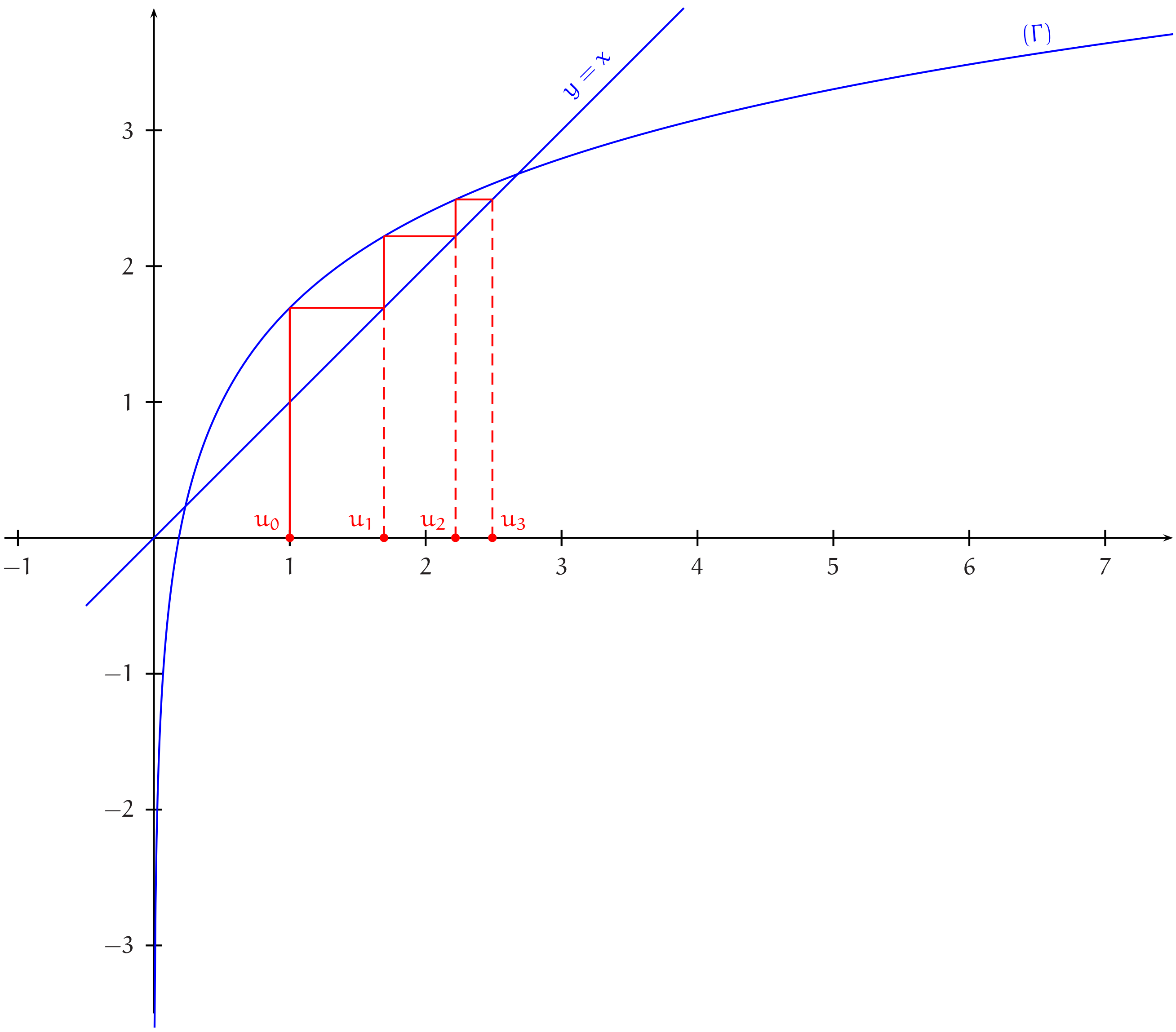
• Pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) = -x\left(1 - \frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = -x\left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par suite, pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)] =]-\infty, \ln 2]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $]-\infty, \ln 2]$ (car $\ln 2 > 0$), on a montré en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [1, +\infty[.}$$

b) L'égalité $g(\alpha) = 0$ s'écrit $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ ou encore $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. **a)** Construction des quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2\times 1)+1 \leqslant \ln(2u_n)+1 \leqslant \ln(2\times 3)+1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1+\ln 6 = 2,7\ldots \leqslant 3$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3.}$$

A partir d'ici, on doit constater que l'énoncé n'est pas résoluble tel qu'il est posé : le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne peut être précisé que si l'on connaît la position de u_n par rapport à α. La question qui devait être posée était donc : « Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ». C'est cette question que l'on résout dorénavant.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$ et puisque $\alpha \geqslant 1$ d'après la question 1.a).

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2 \times 1) + 1 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2 \times \alpha) + 1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ d'après la question 1.b).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha.}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(2u_n) + 1 - u_n = g(u_n)$. Or $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et donc, puisque la fonction g est décroissante sur $[1, \alpha]$, $g(u_n) \geqslant g(\alpha)$ ou encore $g(u_n) \geqslant 0$ et enfin $u_{n+1} \geqslant u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $[1, \alpha]$. Maintenant, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$, on obtient $\ell = \ln(2\ell) + 1$ ou encore $g(\ell) = 0$. Mais alors $\ell = \alpha$ par unicité de α. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

Partie B

1. a) 1 ère solution. Soient x et y deux réels de $[1, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$$F(y) - F(x) = \int_1^y (t-1)e^{1-t}\,dt - \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \int_x^y (t-1)e^{1-t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[x, y]$, on a $(t-1)e^{1-t} \geqslant 0$ (car $t \geqslant x \geqslant 1$) et donc, par positivité de l'intégrale, $F(y) - F(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tous réels x et y de $[1, +\infty[$, $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

2 ème solution. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. On sait alors que la fonction F est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ et plus précisément que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 1. Par suite, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x} \geqslant 0$. Puisque la fonction F' est positive sur $[1, +\infty[$, la fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $x \geqslant 1$. Pour t dans $[1, x]$, posons $u(t) = t - 1$ et $v(t) = -e^{1-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, x]$ et pour t dans $[1, x]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(t) = t-1 & v(t) = -e^{1-t} \\ u'(t) = 1 & v'(t) = e^{1-t} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \left[(t-1)(-e^{1-t})\right]_1^x - \int_1^x 1 \times (-e^{1-t})\,dt = -(x-1)e^{1-x} - 0 - \left[e^{1-t}\right]_1^x \\ &= -(x-1)e^{1-x} - (e^{1-x} - e^0) = -xe^{1-x} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1, +\infty[,\ F(x) = -xe^{1-x} + 1.}$$

c) Soit x un réel de $[1, +\infty[$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -xe^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xe^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(2xe^{1-x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln(e^{1-x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x.$$

2. La fonction f est continue et positive sur $[1, a]$. Donc aire de $(D_a) = \int_1^a f(t)\, dt = F(a)$.

Maintenant, d'après la question précédente, $F(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(2a) + 1 = a \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha$.