BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Liban

EXERCICE 1

Partie A :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$. En particulier, $e^x \neq 0$ et on peut donc écrire $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

• Pour $n = 0$, $(e^x)^0 = 1$ et $e^{0x} = e^0 = 1$. Donc $(e^x)^0 = e^{0x}$ et l'égalité est vraie quand $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $(e^x)^n = e^{nx}$. Alors

$$(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}.$$

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \text{ et pour tout entier naturel } n,\ (e^x)^n = e^{nx}.}$$

Partie B

1. a) Pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$ est continue sur $[0,1]$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Donc, pour tout entier naturel n, u_n existe.

$$\begin{aligned}
u_0 + u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = (1-0)\times 1 = 1.
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 + u_1 = 1.}$$

b)

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 -\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}\,dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln(1+e^0) \\
&= \ln 2 - \ln\left(1+\frac{1}{e}\right) = \ln 2 - \ln\left(\frac{e+1}{e}\right) = \ln 2 - (\ln(e+1) - \ln e) = 1 + \ln 2 - \ln(e+1).
\end{aligned}$$

Ensuite, $u_0 = 1 - u_1 = 1 - (1 + \ln 2 - \ln(e+1)) = \ln(e+1) - \ln 2$.

$$\boxed{u_0 = \ln(1+e) - \ln 2 \text{ et } u_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1}).}$$

Remarque. $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = [\ln(e^x+1)]_0^1 = \ln(e+1) - \ln 2.$

2. Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0,1]$, $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

3. **a)** Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{n}e^{-n}\right) - \left(-\frac{1}{n}e^0\right) = \frac{1-e^{-n}}{n}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

b) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question 2, $u_{n+1} \geqslant 0$ et donc $u_{n+1} + u_n \geqslant u_n$. D'après la question précédente, on a alors $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n,\ u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}.}$$

4. Pour tout entier naturel non nul, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-e^{-n}) = 1$. D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-e^{-n}}{n} = 0$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

EXERCICE 2

1. La droite (D) est la droite passant par A de coordonnées $(1, -2, 1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(3-1, -5+2, -2+1)$ ou encore $(2, -3, -1)$. On en déduit immédiatement qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t \end{array}\right. \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. La droite (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -3, -1)$ et la droite (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(-1, 2, 1)$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires (car s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u}' = k\overrightarrow{u}$, on a $k = -1$ en analysant la troisième coordonnée mais aussi $k = -\dfrac{1}{2}$ en analysant la première coordonnée ce qui est impossible). Donc les droites (D) et (D') ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites (D) et (D') sont sécantes ou non coplanaires.
On en déduit encore que les droites (D) et (D') sont non coplanaires si et seulement si les droites (D) et (D') n'ont aucun point commun. Etudions donc l'intersection des droites (D) et $D')$. Soient t et k deux réels.

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2t = 2 - k \\ -2 - 3t = 1 + 2k \\ -1 - t = k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = -1 - t \\ 1 + 2t = 2 - (-1 - t) \\ -2 - 3t = 1 + 2(-1 - t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = -1 - t \\ t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right. .$$

Ce système n'a pas de solution et donc les droites (D) et (D') n'ont pas de point commun.

$$\boxed{\text{Les droites } (D) \text{ et } (D') \text{ sont non coplanaires.}}$$

3. a) La droite (D) est l'ensemble des points de coordonnées $(1 + 2t, -2 - 3t, -1 - t)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Or, pour tout réel t,

$$4(1 + 2t) + (-2 - 3t) + 5(-1 - t) + 3 = 8t - 3t - 5t + 4 - 2 - 5 + 3 = 0.$$

Donc tout point de la droite (D) appartient au plan (P) ou encore

$$\boxed{\text{le plan } (P) \text{ contient la droite } (D).}$$

b) Soit $M(2 - k, 1 + 2k, k)$, $k \in \mathbb{R}$, un point de (D').

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4(2 - k) + (1 + 2k) + 5k + 3 = 0 \Leftrightarrow 3k + 12 = 0 \Leftrightarrow k = -4.$$

Pour $k = -4$, on obtient le point de (D') de coordonnées $(6, -7, -4)$. Ainsi, le plan (P) et la droite (D') ont un point commun et un seul, le point $C(6, -7, -4)$.

$$\boxed{\text{Le plan } (P) \text{ et la droite } (D') \text{ se coupent en } C(6, -7, -4).}$$

4. a) La droite (D') est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}'(-1, 2, 1)$.
Or, $\overrightarrow{u}'.\overrightarrow{w} = (-1) \times 1 + 2 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D') sont orthogonales. De plus, les droites (Δ) et (D') ont en commun le point C et finalement les droites (Δ) et (D') sont perpendiculaires.

$$\boxed{\text{Les droites } (\Delta) \text{ et } (D') \text{ sont perpendiculaires.}}$$

b) La droite (D) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(2, -3, -1)$.
Or, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 2 \times 1 + (-3) \times 1 + (-1) \times (-1) = 0$ et donc les droites (Δ) et (D) sont orthogonales. Etudions alors l'intersection des droites (D) et (Δ). (Δ) est la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = 6 + t' \\ y = -7 + t' \\ z = -4 - t' \end{array}\right.$, $t' \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 2t = 6 + t' \\ -2 - 3t = -7 + t' \\ -1 - t = -4 - t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -3 + t \\ 1 + 2t = 6 + (-3 + t) \\ -2 - 3t = -7 + (-3 + t) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t' = -3 + t \\ t = 2 \\ t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 2 \\ t' = -1 \end{array}\right. .$$

Puisque le système précédent a une solution, les droites (Δ) et (D) ont un point commun et sont donc perpendiculaires. De plus, pour $t' = -1$, on obtient le point commun à savoir le point E de coordonnées $(5, -8, -3)$

$$\boxed{\text{Les droites } (\Delta) \text{ et } (D) \text{ sont perpendiculaires en } E(5, -8, -3).}$$

EXERCICE 3

1.	**VRAI**
2.	**VRAI**
3.	**FAUX**
4.	**VRAI**
5.	**FAUX**

Justifications.

1. L'affixe du point B est $z_B = e^{i\pi/2}z_A = iz_A = i(2-i) = 1+2i$. L'affixe du milieu de I de du segment $[AB]$ est

$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{2-i+1+2i}{2} = \frac{3+i}{2}.$$

Soit s la similitude directe d'écriture complexe $z' = (1+i)z-1-2i$.

$$z'_A = (1+i)(2-i)-1-2i = 2+1+2i-i-1-2i = 2-i = z_A.$$

Donc le point A est invariant par s et s est bien une similitude directe de centre A. Ensuite,

$$z'_I = (1+i)\times\frac{3+i}{2}-1-2i = \frac{3-1+i+3i}{2}-1-2i = \frac{2+4i}{2}-1-2i = 0 = z_O.$$

Donc, on a bien $s(I) = O$ et la proposition 1 est vraie.

2. Le couple $(x_0, y_0) = (-1, -1)$ est une solution particulière de l'équation $3x-5y = 2$ (E) car

$$3\times(-1)-5\times(-1) = -3+5 = 2.$$

Ensuite, si (x, y) est un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E), alors $3x-5y = 2$ puis $3x-5y = 3x_0-5y_0$ et donc $3(x-x_0) = 5(y-y_0)$.

Comme l'entier 3 divise l'entier $3(x-x_0)$, l'entier 3 divise encore l'entier $5(y-y_0)$. Comme les entiers 3 et 5 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 3 divise l'entier $y-y_0$. De même, l'entier 5 divise l'entier $x-x_0$. Ainsi, il existe des entiers relatifs k et k' tels que $x-x_0 = 5k$ et $y-y_0 = 3k'$ ou encore $x = -1+5k$ et $y = -1+3k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $x = -1+5k$ et $y = -1+3k'$.

$$3x-5y = 2 \Leftrightarrow 3(-1+5k)-5(-1+3k') = 2 \Leftrightarrow 15(k-k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les couples d'entiers relatifs de la forme $(5k-1, 3k-1)$ et la proposition 2 est vraie.

3. Un entier est divisible par 3 si et seulement si cet entier est congru à 0 modulo 3. Maintenant, modulo 3, un entier est congru à -1, 0 ou 1. Il y a donc 3 cas.

- Si $x \equiv 0$ [3] et $y \equiv 0$ [3], alors $x^2+y^2 \equiv 0^2+0^2$ [3] ou encore $x^2+y^2 \equiv 0$ [3].
- Si $x \equiv 0$ [3] et $y \equiv \pm 1$ [3] ou $x \equiv \pm 1$ [3] et $y \equiv 0$ [3], alors $x^2+y^2 \equiv 1$ [3].
- Si $x \equiv \pm 1$ [3] et $y \equiv \pm 1$ [3], alors $x^2+y^2 \equiv 2$ [3].

En résumé, $x^2+y^2 \equiv 0$ [3] $\Leftrightarrow x \equiv 0$ [3] et $y \equiv 0$ [3] ou encore $x^2+y^2 \equiv 0$ [3] si et seulement si x et y sont des multiples de 3. La proposition 3 est fausse.

4. Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 3$ et $2 \leqslant k \leqslant n$.

$$n!+k = k\left(1+\underbrace{2\times\ldots\times(k-1)\times(k+1)\times\ldots\times n}_{n-1 \text{ facteurs}}\right).$$

Maintenant $1 < 2 \leqslant k < k+n!$ et donc k est un diviseur de $n!+k$ qui n'est ni 1, ni $n!+k$. Donc $n!+k$ n'est pas un nombre premier. La proposition 4 est vraie.

5. Le discriminant de l'équation (E') est $\Delta = (-52)^2 - 4 \times 480 = 784 = 28^2$. Donc l'équation (E') admet deux solutions réelles à savoir $x_1 = \dfrac{52 - 28}{2} = 12$ et $x_2 = \dfrac{52 + 28}{2} = 40$. Ces deux solutions sont bien des nombres entiers.

Maintenant, le PGCD de deux entiers doit diviser leur PPCM. Or, 12 ne divise pas 40 et donc il n'existe pas deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont respectivement 12 et 40. La proposition 5 est fausse.

EXERCICE 4

Partie A

1. • La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$, $u'(x)=2x+\dfrac{1}{x}>0$. La fonction u est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x^2-2)=-2$. Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} u(x)=-\infty$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-2)=+\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$.

2. a) La fonction u est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Donc pour tout réel k de $\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-\infty,+\infty[$, l'équation $u(x)=0$ admet une solution et une seule dans $]0,+\infty[$. En particulier, l'équation $u(x)=0$ admet une solution unique dans $]0,+\infty[$.

b) La machine donne $u(1,31)=-0,01\ldots<0$ et $u(1,32)=0,02\ldots>0$. Donc, $u(1,31)<u(\alpha)<u(1,32)$ et puisque la fonction u est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

$$\boxed{1,31<\alpha<1,32.}$$

3. Pour $x\in]0,\alpha[$, on a $u(x)<u(\alpha)=0$ et pour $x\in]\alpha,+\infty[$, on a $u(x)>u(\alpha)=0$. Donc,

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ est strictement négative sur }]0,\alpha[\text{, strictement positive sur }]\alpha,+\infty[\text{ et s'annule en } \alpha.}$$

4. L'égalité $u(\alpha)=0$ s'écrit $\alpha^2-2+\ln\alpha=0$ ou encore $\ln\alpha=2-\alpha^2$.

Partie B

1. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel $x>0$,

$$\begin{aligned} f'(x)&=2x+2\times\left(-\frac{1}{x}\right)\times(2-\ln x)=2x-\frac{2(2-\ln x)}{x}=\frac{2x^2-2(2-\ln x)}{x}=\frac{2(x^2-2+\ln x)}{x}\\ &=\frac{2u(x)}{x}.\end{aligned}$$

2. Pour tout réel $x>0$, $\dfrac{2}{x}>0$. Donc, pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $u(x)$. D'après la question 3 de la partie A, la fonction f' est strictement négative sur $]0,\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha,+\infty[$. On en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement décroissante sur }]0,\alpha] \text{ et strictement croissante sur } [\alpha,+\infty[.}$$

Partie C

1. Soit $x>0$.

$$AM=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(\ln x-2)^2}=\sqrt{x^2+(2-\ln x)^2}=\sqrt{f(x)}.$$

2. a) Pour tout réel $x>0$, $f(x)\geqslant x^2>0$. Donc la fonction f est strictement positive sur $]0,+\infty[$. On en déduit que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis que pour tout réel $x>0$, $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Mais pour tout réel $x>0$, $\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}>0$ et donc, pour tout réel $x>0$, $g'(x)$ est du signe de $f'(x)$. Par suite, les fonction f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$.

b) D'après la question 2 de la partie B, la fonction f admet un minimum sur $]0,+\infty[$ atteint en α. Puisque les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0,+\infty[$, la distance AM est minimale quand l'abscisse de M est égale à α et donc quand le point M est le point P de coordonnées $(\alpha,\ln\alpha)$.

c) D'après la question 4 de la partie A, on a $\ln\alpha=2-\alpha^2$ et donc

$$AP=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha^2+(2-\ln\alpha)^2}=\sqrt{\alpha^2+(\alpha^2)^2}=\sqrt{\alpha^2(1+\alpha^2)}=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}\ (\alpha>0 \text{ et donc } \sqrt{\alpha^2}=\alpha).$$

$$\boxed{AP=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}.}$$

3. Le coefficient directeur de la droite (AP) est $a = \dfrac{y_P - y_A}{x_P - x_A} = \dfrac{\ln \alpha - 2}{\alpha}$. D'autre part, le coefficient directeur de la tangente à Γ en P est $a' = \ln'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha}$. Maintenant

$$a \times a' = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha} \times \frac{1}{\alpha} = \frac{\ln \alpha - 2}{\alpha^2} = \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1,$$

et donc

$$\boxed{\text{la droite } (AP) \text{ est perpendiculaire à la tangente à } \Gamma \text{ en } P.}$$

