BACCALAUREAT GENERAL

Session de Juin 2010

MATHEMATIQUES

- Série S -

Enseignement de Spécialité

Centres étrangers

EXERCICE 1

Question 1.	**VRAI**
Question 2.	**VRAI**
Question 3.	**FAUX**
Question 4.	**VRAI**

Question 1 Un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$ est le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $(2, -3, 1)$ et un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_2$ est le vecteur $\overrightarrow{u_2}$ de coordonnées $(-2, -1, 1)$. De plus,

$$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = 2 \times (-2) + (-3) \times (-1) + 1 \times 1 = -4 + 3 + 1 = 0.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont orthogonaux, les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales. La proposition 1 est donc vraie.

Question 2 Un vecteur normal au plan $(\mathscr{P})$ est un vecteur directeur de $(\mathscr{D})$ à savoir le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(4, 2, -2)$. Une équation du plan $(\mathscr{P})$ est donc $4(x-2)+2(y+1)-2(z-3) = 0$ ou encore $2(x-2)+(y+1)-(z-3) = 0$ ou enfin $2x + y - z = 0$. Donc la proposition 2 est vraie.

Question 3 Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-0,0003t}.$$

La probabilité demandée est $p(X > 2000)$. Or

$$p(X > 2000) = 1 - p(X \leqslant 2000) = 1 - (1 - e^{-0,0003 \times 2000}) = e^{-0,6} = 0,54\ldots.$$

Donc la proposition 3 est fausse.

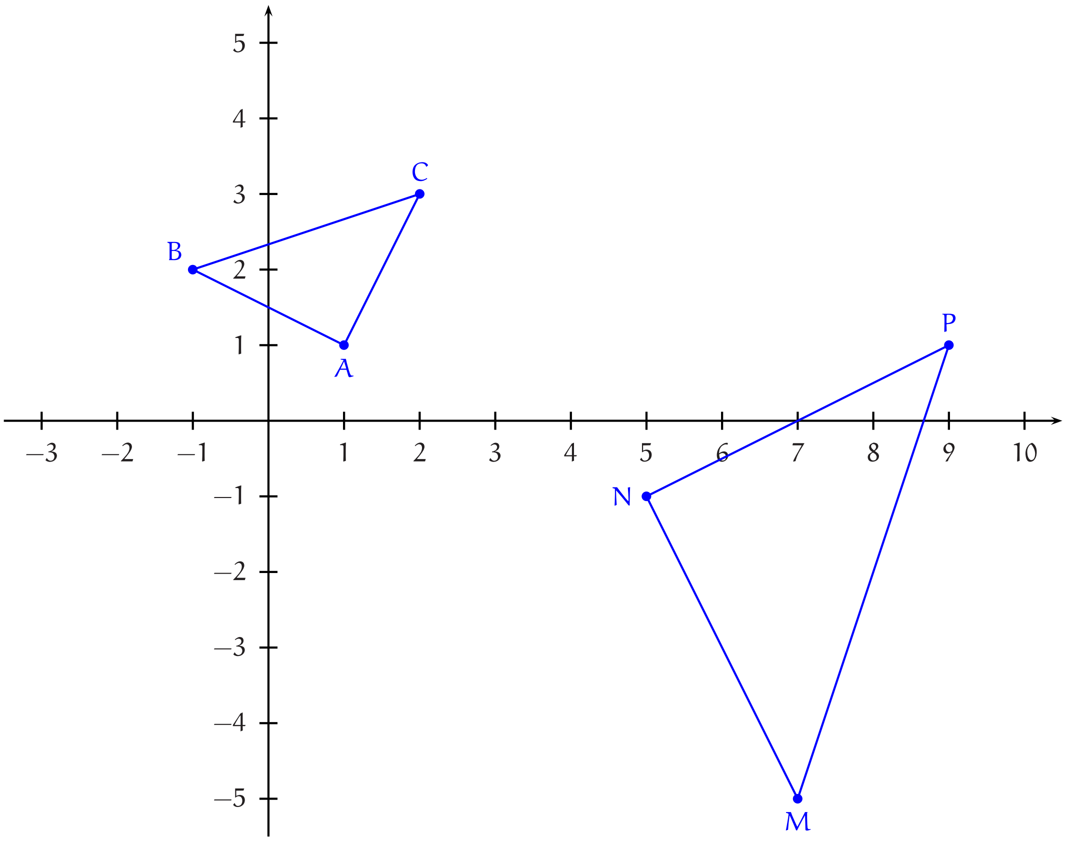
Question 4 On a $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$. D'une part, $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$. D'autre part, d'après la formule des probabilités totales

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = \frac{7}{25} + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{7}{25} + (1 - 0,1)(1 - 0,4) = 0,28 + 0,54 = 0,82.$$

Donc, $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,28}{0,82} = \dfrac{28}{82} = \dfrac{14}{41}$. La proposition 4 est vraie.

EXERCICE 2

1. a)



b) • $AB = |b - a| = |-2 + i| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.
• $AC = |c - a| = |1 + 2i| = \sqrt{5}$.
• $BC = |c - b| = |3 + i| = \sqrt{10}$.
• $MN = |n - m| = |-2 + 4i| = 2|-1 + 2i| = 2\sqrt{5}$.
• $MP = |p - m| = |2 + 6i| = 2|1 + 3i| = 2\sqrt{10}$.
• $NP = |p - n| = |4 + 2i| = 2|2 + i| = 2\sqrt{5}$.

c) Mais alors, $\dfrac{NM}{AB} = \dfrac{NP}{AC} = \dfrac{MP}{BC} = 2$ et on en déduit que les triangles ABC et MNP sont semblables.

2. Une similitude directe

a) 1ère solution. Soient α et β deux nombres complexes, α étant non nul et soit s la similitude directe d'expression complexe $z' = \alpha z + \beta$.

$$\left\{\begin{array}{l} s(A) = N \\ s(B) = P \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (1+i)\alpha + \beta = 5 - i \\ (-1+2i)\alpha + \beta = 9 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ((1+i) - (-1+2i))\alpha = (5-i) - (9+i) \\ (-1+2i)\alpha + \beta = 9 + i \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2-i)\alpha = -4 - 2i \\ (-1+2i)\alpha + \beta = 9 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{(-4-2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ (-1+2i)\alpha + \beta = 9 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-6-8i}{2^2 + (-1)^2} \\ (-1+2i)\alpha + \beta = 9 + i \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-6-8i}{5} \\ \beta = -(-1+2i)\left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i\right) + 9 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-6-8i}{5} \\ \beta = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i + \dfrac{12}{5}i - \dfrac{16}{5} + 9 + i \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i \\ \beta = \dfrac{23}{5} + \dfrac{9}{5}i \end{array}\right. .$$

Ainsi, il existe une unique similitude directe s transformant A en N et B en P. L'expression complexe de s est $z' = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i\right) z + \dfrac{23}{5} + \dfrac{9}{5}i$.

2ème solution. Puisque $A \neq B$ et $N \neq P$, il existe une unique similitude directe s transformant A en N et B en P. Soit s_1 la similitude directe d'expression complexe $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$.

Par s_1, l'image du point A est le point A' d'affixe a' telle que

$$a' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(1+i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i - \frac{6}{5}i + \frac{8}{5} + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = 5 - i = n,$$

et l'image du point B est le point B' d'affixe b' telle que

$$b' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(-1+2i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i - \frac{12}{5}i + \frac{16}{5} + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = 9 + i = p.$$

Donc s' transforme A en N et B en P. On en déduit que $s' = s$ et donc que l'expression complexe de s est $z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right) z + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$.

b) Le rapport de s est $k = \left|-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right| = \left|-\frac{2}{5}(3+4i)\right| = \frac{2}{5}|3+4i| = \frac{2}{5}\sqrt{3^2+4^2} = 2$.

Notons θ une mesure de l'angle de s. θ est un argument de $-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i = 2\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$ et est donc défini par les égalités $\cos(\theta) = -\frac{3}{5}$ et $\sin(\theta) = -\frac{4}{5}$. La machine fournit $\theta = -127°$ arrondi au degré.

Le centre Ω de la similitude s est son point invariant. On note ω l'affixe de Ω et on a

$$s(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\omega + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = \omega \Leftrightarrow \left(\frac{11}{5} + \frac{8}{5}i\right)\omega = \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i$$
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{23+9i}{11+8i} \Leftrightarrow \omega = \frac{(23+9i)(11-8i)}{11^2+8^2} \Leftrightarrow \omega = \frac{325-85i}{185} \Leftrightarrow \omega = \frac{65-17i}{37}.$$

$\boxed{s \text{ est la similitude directe de centre } \Omega\left(\frac{65}{37}, -\frac{17}{37}\right), \text{ de rapport 2 et d'angle } -127° \text{ arrondi au degré.}}$

c) $c' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)(2+3i) + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = -\frac{12}{5} + \frac{24}{5} - \frac{18}{5}i - \frac{16}{5}i + \frac{23}{5} + \frac{9}{5}i = 7 - 5i = m$. Donc la similitude s transforme le point C en le point M.

3. Une similitude indirecte

a) $a' = 2i(1-i) + 3 - 3i = 5 - i = n$, $b' = 2i(-1-2i) + 3 - 3i = 7 - 5i = m$ et $c' = 2i(2-3i) + 3 - 3i = 9 + i = p$. Donc

$$\boxed{s'(A) = N,\ s'(B) = M \text{ et } s'(C) = P.}$$

b) Soit M un point du plan dont l'affixe est noté z. En posant $z = x + iy$ où x et y sont deux réels, on a

$$s'(M) = M \Leftrightarrow 2i\bar{z} + 3 - 3i = z \Leftrightarrow 2i(x - iy) + 3 - 3i = x + iy \Leftrightarrow (-x + 2y + 3) + i(2x - y - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + 3 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \text{(car } x \text{ et } y \text{ sont réels)}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ -x + 2(2x-3) + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z = 1 - i.$$

$\boxed{s' \text{ admet un unique point invariant, le point } K \text{ d'affixe } k = 1 - i.}$

c) $f(K) = s'(h(K)) = s'(K) = K$. D'autre part, l'affixe de $h(J)$ est $1 - i + \frac{1}{2}(2 - (1-i)) = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$ puis l'affixe de $s'(h(J))$ est $2i\left(\frac{3}{2} + \frac{i}{2}\right) + 3 - 3i = 2$. Donc $f(J) = J$.

f est une similitude en tant que composée de deux similitudes. De plus, f admet au moins deux points distincts invariants. On sait alors que f est soit une réflexion, soit l'identité. Comme f est une similitude indirecte en tant que composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe, f n'est pas l'identité et donc

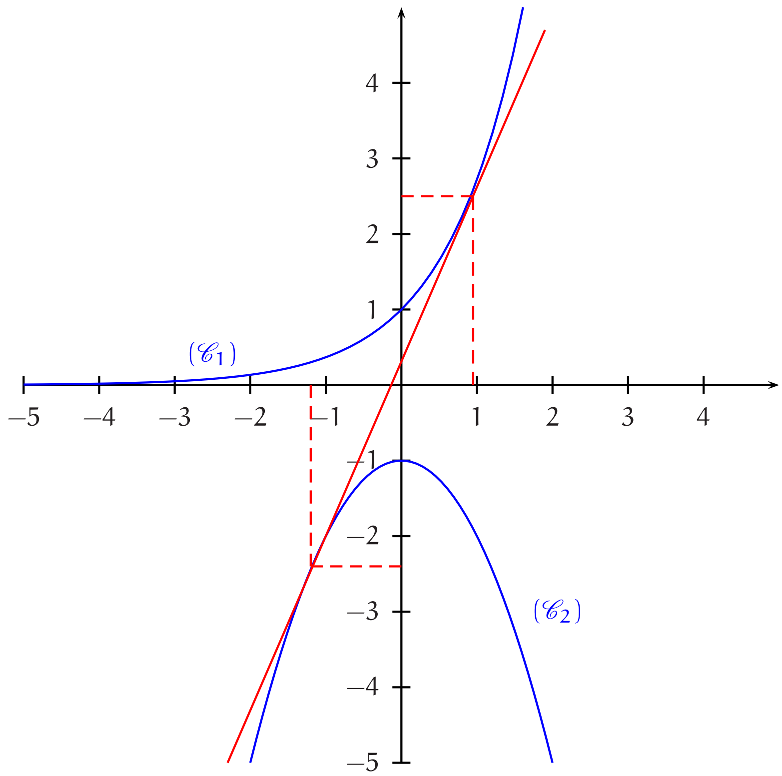
$$\boxed{f \text{ est une réflexion.}}$$

d) L'égalité $f = s' \circ h$ fournit $s' \circ h \circ h^{-1} = f \circ h^{-1}$ et donc $s' = f \circ h^{-1}$ où f est une réflexion et h^{-1} est l'homothétie de centre K et de rapport 2.

$\boxed{s' \text{ est la composée d'une réflexion et d'une homothétie.}}$

EXERCICE 3

1.



L'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_1)$ vaut environ $-1,2$ et l'abscisse du point de contact de cette tangente avec $(\mathscr{C}_2)$ vaut environ $0,9$.

2. a) On note g la fonction $x \mapsto e^x$ et h la fonction $x \mapsto -x^2 - 1$.
Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_A)$ est $y = g'(a)(x-a) + g(a)$ ou encore $y = e^a(x-a) + e^a$ ou enfin $y = e^a x + e^a - ae^a$.

b) Une équation de la tangente $(\mathscr{T}_B)$ est $y = h'(b)(x-b) + h(b)$ ou encore $y = (-2b)(x-b) - b^2 - 1$ ou enfin $y = -2bx + b^2 - 1$.

c) Les droites $(\mathscr{T}_A)$ et $(\mathscr{T}_B)$ sont confondues si et seulement si elles ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine. Ces dernières conditions sont équivalentes au système $\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right.$.

d)

$$\left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = \left(-\dfrac{e^a}{2}\right)^2 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ 4e^a - 4ae^a = e^{2a} - 4 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{array}\right..$$

3. a) Soit x un réel de $]-\infty, 0[$. Alors $2x < 0$ puis $e^{2x} < 1$ puis $e^{2x} - 4 < -3$ et en particulier $e^{2x} - 4 < 0$. D'autre part, puisque $x - 1 < 0$ et $4e^x > 0$, on a $4e^x(x-1) < 0$.

b) Mais alors $f(x) = (e^{2x} - 4) + 4e^x(x-1) < 0$. En particulier, pour tout réel x de $]-\infty, 0[$, $f(x) \neq 0$ et donc

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'a pas de solution dans l'intervalle }]-\infty, 0[.}$$

c) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 2e^{2x} + 4e^x + 4xe^x - 4e^x = 2e^{2x} + 4xe^x.$$

Par suite, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) \geqslant e^{2x}$ et en particulier $f'(x) > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0, +\infty[.}$$

d) $f(0) = e^0 + 0 - 4e^0 - 4 = -7$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{2x} - 4) = +\infty$. Mais on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} 4e^x(x-1) = +\infty$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Maintenant, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et on sait que pour tout réel k de $[f(0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[0, +\infty[$. En particulier, comme 0 appartient à $[-7, +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[0, +\infty[$.

La machine fournit $f(0,84) = -0,1\ldots < 0$ et $f(0,85) = 0,07\ldots > 0$ Par suite, $f(0,84) < f(a) < f(0,85)$ et puisque f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on a montré que

$$\boxed{0,84 < a < 0,85.}$$

4. $0,84 < a < 0,85 \Rightarrow e^{0,84} < e^a < e^{0,85} \Rightarrow -\dfrac{e^{0,85}}{2} < -\dfrac{e^a}{2} < -\dfrac{e^{0,84}}{2}$. Donc

$$-\frac{e^{0,85}}{2} < b < -\frac{e^{0,84}}{2}.$$

Maintenant, la machine fournit $-\dfrac{e^{0,85}}{2} = 1,16\ldots$ et $\dfrac{e^{0,84}}{2} = 1,15\ldots$ On en déduit que

$$\boxed{-1,2 < b < -1,1.}$$

EXERCICE 4

1. Etude des propriétés de la fonction f

a) La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour $x \geqslant 0$,

$$f'(x) = 0 - 5 \times \left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = \frac{5}{(x+1)^2}.$$

La dérivée de f est strictement positive sur $[0, +\infty[$ et donc f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow 6 - \frac{5}{x+1} = x \Leftrightarrow x - 6 + \frac{5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)+5}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 5x - 1$ est $\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) = 29$. L'équation $x^2 - 5x - 1 = 0$ admet donc deux racines réelles à savoir $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}$ et $\beta = \dfrac{5-\sqrt{29}}{2}$. β est strictement négatif (car $\sqrt{29} > \sqrt{25} = 5$) et α est strictement positif. Donc

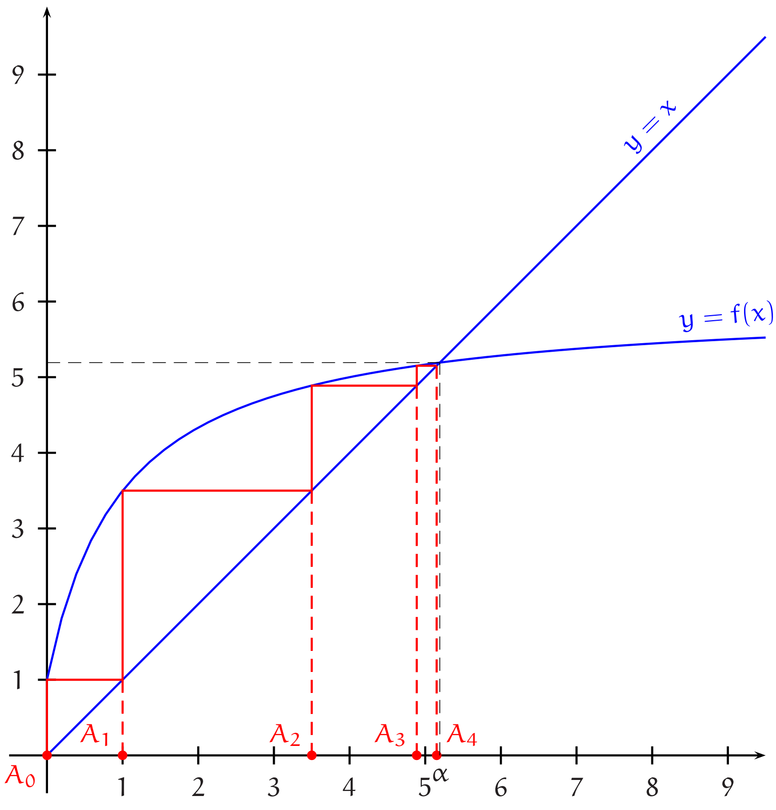
$$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution dans } [0, +\infty[\text{, le nombre } \alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}.}$$

c) Soit $x \in [0, \alpha]$. Puisque $0 \leqslant x \leqslant \alpha$ et que f est croissante sur $[0, +\infty[$, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(\alpha)$ ou encore $1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ et en particulier $0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$.
De même, si $x \geqslant \alpha$, alors $f(x) \geqslant f(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\text{Si } x \in [0, \alpha]\text{, alors } f(x) \in [0, \alpha] \text{ et si } x \in [\alpha, +\infty[\text{, alors } f(x) \in [\alpha, +\infty[.}$$

2. Etude de la suite (u_n) pour $u_0 = 0$

a)



Il semble que la suite (u_n) soit croissante, convergente de limite α.

b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$.

• Puisque $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) = 1$ et $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} = 5,1\ldots$, ces inégalités sont vraies quand $n = 0$.

• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Puisque f est croissante sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ et en particulier $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$.

Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite. ℓ est un réel positif et

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(6 - \frac{5}{u_n + 1}\right) = 6 - \frac{5}{\ell + 1} = f(\ell).$$

Maintenant, α est l'unique solution dans $[0, +\infty[$ de l'équation $f(x) = x$ et donc $\ell = \alpha$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante et converge vers } \alpha.}$$

3. Etude des suites (u_n) selon les valeurs du réel positif ou nul u_0

1er cas. Supposons $0 \leqslant u_0 < \alpha$. Vérifiions tout d'abord que $u_1 > u_0$.

$$u_1 - u_0 = 6 - \frac{5}{u_0 + 1} - u_0 = \frac{(6 - u_0)(u_0 + 1) - 5}{u_0 + 1} = \frac{-u_0^2 + 5u_0 + 1}{u_0 + 1} = \frac{-(u_0 - \alpha)(u_0 - \beta)}{u_0 + 1} > 0 \text{ car } \beta < u_0 < \alpha.$$

Ainsi, $u_1 > u_0$. Mais alors, toute la démarche de la question précédente reste valable et de la même manière, on peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n < u_{n+1} < \alpha$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et est majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution positive de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire converge vers α.

$$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant u_0 < \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante et converge vers } \alpha.}$$

2ème cas. Supposons $u_0 > \alpha$. Alors $u_1 - u_0 = \dfrac{-(u_0 - \alpha)(u_0 - \beta)}{u_0 + 1} < 0$. Donc $u_1 < u_0$. Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, en adaptant la démarche de la question précédente, on peut montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\alpha < u_{n+1} < u_n$. Dans ce cas, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et est minorée par α et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique solution positive de l'équation $f(x) = x$ c'est-à-dire converge vers α.

$$\boxed{\text{Si } u_0 > \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante et converge vers } \alpha.}$$

3ème cas. Supposons $u_0 = \alpha$. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \alpha$.
• C'est vrai pour $n = 0$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $u_n = \alpha$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(\alpha) = \alpha$.
Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\text{Si } u_0 = \alpha, \text{ la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est constante et en particulier converge vers } \alpha.}$$

