

EXERCICE 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifiant la condition (E) :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}.$$

1) Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, vérifie la condition (E) , alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie :

$$\text{pour tout nombre réel } x \text{ strictement positif, } g'(x) = e^{2x}.$$

2) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifient la condition (E) .

3) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$.

On désigne par c sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x , le signe de $h(x)$.

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} x e^{2x} dx$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx$.

b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe c .