EXERCICE 3
Partie A

1) La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{x^2e^{2x}}{x^2} = e^{2x}.$$

2) Mais alors, il existe un réel C tel que pour tout réel $x > 0$, $g(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C$ puis $f(x) = xg(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$. En résumé, si f vérifie la condition (E) alors il existe un réel C tel que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$.

Réciproquement, s'il existe un réel C tel que pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$, alors la fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$,

$$xf'(x) - f(x) = x\left(\frac{1}{2}e^{2x} + xe^{2x} + C\right) - \left(\frac{1}{2}xe^{2x} + Cx\right) = x^2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx - \frac{1}{2}xe^{2x} - Cx = x^2e^{2x},$$

et donc la fonction f vérifie la condition (E).

Les fonctions f vérifiant la condition (E) sont les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$ où C est un réel.

3) Soient C un réel puis f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} + Cx$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{e}{2} + \frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{e}{2}.$$

La fonction définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$ est la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x$.

Partie B

1) On sait déjà que $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ensuite, pour tout réel $x \geqslant 0$,

$$h(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{e}{2}x = \frac{x}{2}(e^{2x} - e).$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{x}{2} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $h(x)$ est du signe de $e^{2x} - e$. Or

$$\begin{aligned} e^{2x} - e > 0 &\Leftrightarrow e^{2x} > e^1 \Leftrightarrow 2x > 1 \text{ (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Enfin, $h(0) = 0$ et finalement

la fonction h est strictement négative sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et s'annule en 0 et $\frac{1}{2}$.

2) a) Pour x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, posons $u(x) = x$ et $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et pour x dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \\ u'(x) = 1 & v'(x) = e^{2x} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx = \left[x \times \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{4}e^1 - 0 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}e - \left(\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}e^0\right)$$
$$= \frac{1}{4}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}\,dx - \frac{e}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \frac{1}{8} - \frac{e}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{e}{16} = \frac{2-e}{16}.$$

$$\boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{2-e}{16}.}$$

b) D'après la question 1), la fonction h est négative sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et est strictement positive sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$. L'aire demandée est donc

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,dx = \frac{e-2}{16} = 0,04\ldots.$$