EXERCICE 4

Partie A

1. **a)** • La fonction g est dérivable sur $[1, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[1, +\infty[$ et pour $x \geqslant 1$,

$$g'(x) = \frac{2}{2x} - 1 = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

On a $g'(1) = 0$ et pour $x > 1$, $g'(x) < 0$. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

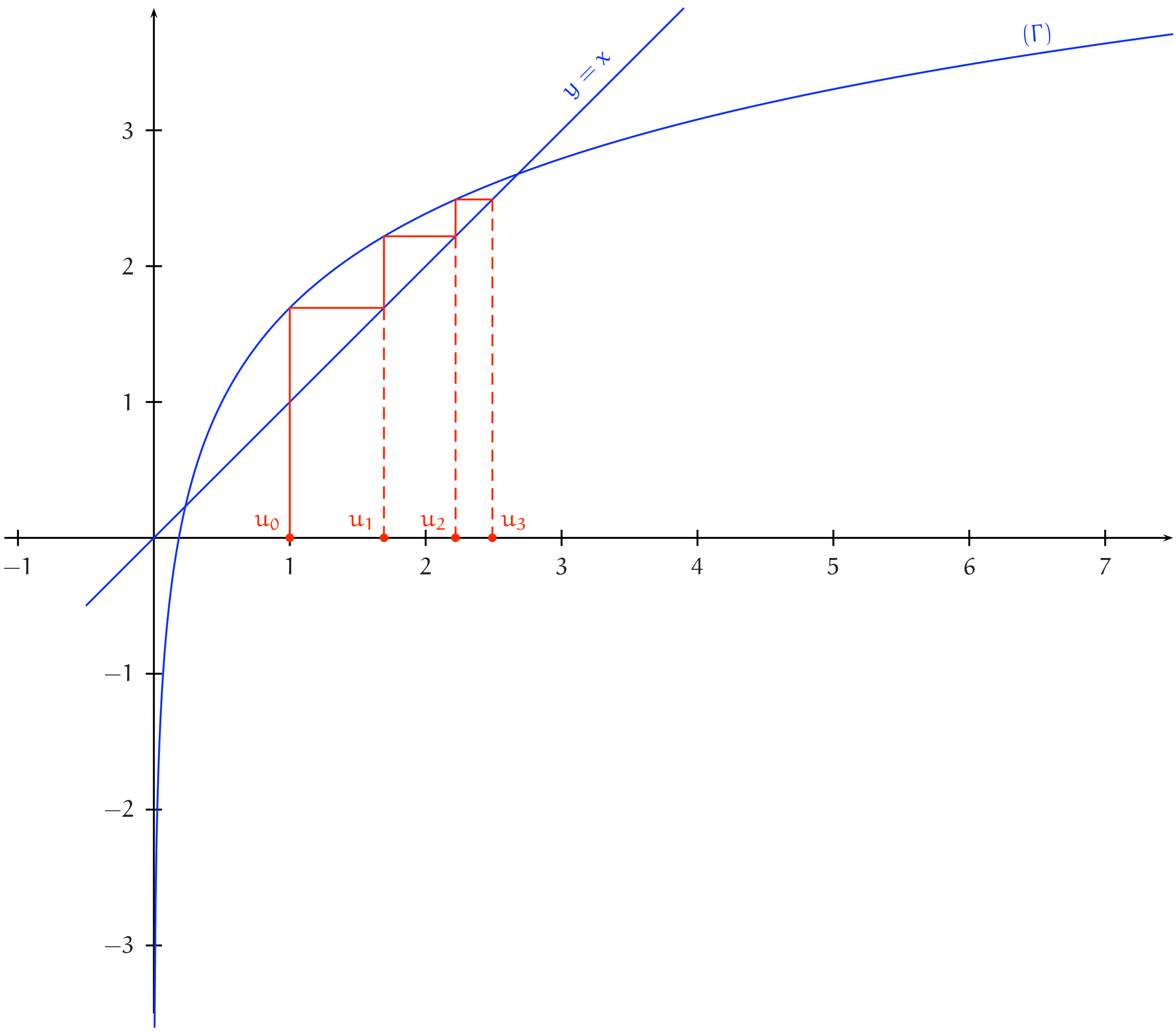
• Pour tout réel $x \geqslant 1$, $g(x) = -x\left(1 - \frac{\ln(2x)}{x} - \frac{1}{x}\right) = -x\left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right)$. Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - 2\frac{\ln(2x)}{2x} - \frac{1}{x}\right) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

• Ainsi, la fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. Par suite, pour tout réel k de $]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(1)] =]-\infty, \ln 2]$, l'équation $g(x) = k$ admet une solution et une seule dans $[1, +\infty[$. Comme 0 appartient à $]-\infty, \ln 2]$ (car $\ln 2 > 0$), on a montré en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = 0 \text{ admet une unique solution dans } [1, +\infty[.}$$

b) L'égalité $g(\alpha) = 0$ s'écrit $\ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0$ ou encore $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2. **a)** Construction des quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$



b) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$.
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant 3$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2\times 1)+1 \leqslant \ln(2u_n)+1 \leqslant \ln(2\times 3)+1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1+\ln 6 = 2,7\ldots \leqslant 3$.

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant 3.}$$

A partir d'ici, on doit constater que l'énoncé n'est pas résoluble tel qu'il est posé : le signe de $u_{n+1} - u_n$ ne peut être précisé que si l'on connaît la position de u_n par rapport à α. La question qui devait être posée était donc : « Montrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ ». C'est cette question que l'on résout dorénavant.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

• C'est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$ et puisque $\alpha \geqslant 1$ d'après la question 1.a).
• Soit $n \geqslant 0$. Supposons que u_n est défini et $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Alors tout d'abord $2u_n > 0$ et donc u_{n+1} existe. Ensuite, par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, $\ln(2 \times 1) + 1 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2 \times \alpha) + 1$ ou encore $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ d'après la question 1.b).

On a montré par récurrence que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant \alpha.}$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(2u_n) + 1 - u_n = g(u_n)$. Or $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ et donc, puisque la fonction g est décroissante sur $[1, \alpha]$, $g(u_n) \geqslant g(\alpha)$ ou encore $g(u_n) \geqslant 0$ et enfin $u_{n+1} \geqslant u_n$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha.}$$

c) Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ élément de $[1, \alpha]$. Maintenant, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$, on obtient $\ell = \ln(2\ell) + 1$ ou encore $g(\ell) = 0$. Mais alors $\ell = \alpha$ par unicité de α. On a montré que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$

Partie B

1. a) 1 ère solution. Soient x et y deux réels de $[1, +\infty[$ tels que $x \leqslant y$.

$$F(y) - F(x) = \int_1^y (t-1)e^{1-t}\,dt - \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \int_x^y (t-1)e^{1-t}\,dt.$$

Pour tout réel t de $[x, y]$, on a $(t-1)e^{1-t} \geqslant 0$ (car $t \geqslant x \geqslant 1$) et donc, par positivité de l'intégrale, $F(y) - F(x) \geqslant 0$. Ainsi, pour tous réels x et y de $[1, +\infty[$, $x \leqslant y \Rightarrow F(x) \leqslant F(y)$ et donc

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est croissante sur } [1, +\infty[.}$$

2 ème solution. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$. On sait alors que la fonction F est définie et dérivable sur $[1, +\infty[$ et plus précisément que la fonction F est la primitive de la fonction f qui s'annule en 1. Par suite, pour tout réel $x \geqslant 1$, $F'(x) = f(x) = (x-1)e^{1-x} \geqslant 0$. Puisque la fonction F' est positive sur $[1, +\infty[$, la fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $x \geqslant 1$. Pour t dans $[1, x]$, posons $u(t) = t - 1$ et $v(t) = -e^{1-t}$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $[1, x]$ et pour t dans $[1, x]$ on a

$$\begin{array}{cc} u(t) = t - 1 & v(t) = -e^{1-t} \\ u'(t) = 1 & v'(t) = e^{1-t} \end{array}$$

De plus, les fonctions u' et v' sont continues sur $[1, x]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt = \left[(t-1)(-e^{1-t})\right]_1^x - \int_1^x 1 \times (-e^{1-t})\,dt = -(x-1)e^{1-x} - 0 - \left[e^{1-t}\right]_1^x \\ &= -(x-1)e^{1-x} - (e^{1-x} - e^0) = -xe^{1-x} + 1. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [1, +\infty[,\ F(x) = -xe^{1-x} + 1.}$$

c) Soit x un réel de $[1, +\infty[$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -xe^{1-x} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2xe^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \ln\left(2xe^{1-x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln(2x) + \ln(e^{1-x}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln(2x) + 1 - x = 0 \Leftrightarrow \ln(2x) + 1 = x.$$

2. La fonction f est continue et positive sur $[1, a]$. Donc aire de $(D_a) = \int_1^a f(t)\ dt = F(a)$.

Maintenant, d'après la question précédente, $F(a) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(2a) + 1 = a \Leftrightarrow g(a) = 0 \Leftrightarrow a = \alpha$.